ARCHIV

FOR

MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND, SOPHUS LIE, G. O. SARS OG **S. TORUP**

NITTENDE BIND

KRISTIANIA

ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

LARS SWANSTRØM

1897

Indhold.

ON SOME

WEST-AUSTRALIAN

ENTOMOSTRACA

RAISED FROM DRIED SAND

BY

G. O. SARS

WITH 4 AUTOGRAPHIC PLATES

ARCHIV F. MATHEM. OG NATURVIDENSKAB

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1896

Introduction.

Mr. Knut Dahl, who has been travelling for 2 years in the northern and western parts of Australia, and who also made some excursions into the interior of the continent, brought with him, on returning home this year, a sample of dried material taken by him from shallow depressions in the sandy desert, at a distance of about 40 miles east of Roebuck Bay. When he first visited these inner tracts, immediately after the rainy season, all the greater depressions were filled with rain-water, and swarmed with Entomostraca, among which an *Apus* was observed in great numbers. Unfortunately he did not preserve any of the specimens, apparently owing to the want of a suitable preserving fluid. Later in the season he again visited the interior of the country, but now nearly all the depressions were completely dried up, and the whole country had the character of a barren desert. Having, however, learned that at times some parts of this desert were peopled by multitudes of small crustaceans, and knowing of the good results of my earlier hatching experiments, he kindly collected for my use some dried material from places where it was supposed that, at an earlier time of the season, rain-water accumulated. The material, when received (on the 4th May of the present year), had the character of a very fine, reddish

Trykt den 21de Oktober 1896.

brown sand, without any mud intermingled, and at first I therefore had some doubts as to the suitableness of such a material for hatching operations. On a preliminary microscopical examination of the sand, however, some scattered pieces of the carapace of an *Apus*, and of the shell of a bivalve *Phyllopod* were easily detected, as also a few detached valves of 2 different *Cypridids*, and this induced me immediately to start upon my hatching experiments. For this purpose I prepared a series of aquaria, to receive each a small portion of the sample, the date of preparation being in each case noted. The aquaria were placed in my laboratory in such a manner, that they were exposed to the direct rays of the sun during the first part of the forenoon, and in clear weather the temperature of the water was often found during this time to rise to a very considerable height. After the lapse of some days a few small Entomostraca made their appearance in a number of my aquaria, whereas in others no trace of life could be detected, either at that time or subsequently. The latter were of course discarded, while the former were kept for further observation during the whole summer. Of the results of my experiments, which I believe may be of some interest, I propose to treat in the present paper. The number of species hatched and examined in detail, is rather limited, amounting to only 5 in all, viz., 2 Phyllopoda, 1 Cladoceran, and 2 Ostracoda; but of these only one of the Phyllopoda seems to have been noticed at an earlier date, whereas I regard the 4 other species as new to science.

Phyllopoda.

Trib. Notostraca. Fam. Apodidæ.

Gen. Apus, Schæffer.

1. *Apus australiensis,* Spencer & Hall.
(Pl. 1).

Apus australiensis, Spencer & Hall, Report on the Horn Expedition to Central Australia. Part II. Zoology. Crustacea, p. 235, Pl. 20, figs. 1—3.

A single specimen of an *Apus,* which in all probability is referable to the above-named species described by Messrs. Spencer & Hall, developed in one of my aquaria, and was watched for nearly a month. On Plate 1 is given a figure (dorsal aspect) of the specimen in its most advanced state, drawn from life, and accompanied by some detail drawings. On comparing this figure, which has been carefully verified by a renewed examination of the preserved specimen, with that given by Messrs. Spencer & Hall, several rather striking differences may be found to exist, both as regards the form of the carapace, and the several proportions given by the above-named authors; and, indeed, these differences might lead one to suppose, that in reality it belonged to a different species. Considering, however, the great variations in these respects found in different specimens of the same species, especially when examined in a preserved state, I am unwilling to lay any stress on such characters as specific marks. The specimen was of rather small size, as compared with those examined by the above-named gentlemen, and had probably not nearly reached to its full size; yet is was so far developed as to admit of the assumption that it exhibited all the essential characteristics of the species.

The dimensions of the specimen are as follows:

Total length, measured from the frontal margin to the end of the terminal caudal segment: 13 mm.

Length of carapace: 8.5 mm.

Median length of same (to the bottom of the posterior sinus): 6.8 mm.

Greatest width of same: 5.8 mm.

Median length of cephalic part of carapace (to the posterior edge of the mandibular segment): 2.5 mm.

Width of posterior sinus: 2.9 mm.

Depth of same: 1.6 mm.

Length of exposed part of body: 6.4 mm.

Length of terminal caudal segment: 0.7 mm.

Width of same: 1.2 mm.

Length of caudal filaments: 7.4 mm.

From the above-given dimensions, it will appear, that in the specimen examined by me, the carapace is comparatively larger in proportion to the exposed part of the body, the proportion in length between the two being as 4 to 3, whereas, according to Messrs. Spencer & Hall, these parts are of about equal length. Moreover, the width of the carapace in the specimen examined by me, is far from attaining the median length, whereas, according to Messrs. Spencer & Hall, it exceeds it considerably. On the whole, the form of the carapace, when seen from above (fig. 1), looks rather different. Messrs. Spencer & Hall describe it as a short oval, and in the figure its greatest width occurs considerably behind the middle. In the specimen examined by me, it has an oblong oval form, being broadest somewhat in front of the middle, and slightly narrowed posteriorly, with the edges quite evenly arched in front and laterally. The posterior sinus is broadly rounded at the bottom, and is edged with from 24 to 30 small denticles. On the lower edge of the carapace there are only 3 or 4 very small serrations close to the posterior corners, whereas, according to Messrs. Spencer & Hall, they extend to about half the length of the carapace. The dorsal carina is quite smooth in the specimen examined by me, and gradually vanishes anteriorly, for which reason its exact length cannot be stated; it terminates at the bottom of the posterior sinus in a slightly projecting prominence. The cephalic part of the carapace, defined by the strongly-marked cervical furrow containing the transversely convex mandibular segment, but little exceeds half the median length of the remaining part of the carapace, whereas in the figure given by Messrs. Spencer & Hall, it almost equals this part in length The exposed part of the body is subcylindric in form, though gradually tapering somewhat distally, and exhibits about 28 segments, of which the 12 posterior are without legs. They are, as usual, provided dorsally with a transversal row of short stout spines, which, on the non-limb-bearing (caudal) segments, extend also around the ventral side. The terminal caudal segment, to which the name of telson can scarcely be applied here, is about twice as broad as it is long, and somewhat flattened, expanding a little distally, with the hind edge slightly emarginated (see fig. 5). It carries dorsally a single, stout median spine near the hind edge, and has moreover on each side, in its anterior part, a small circular area carrying a delicate sensory bristle, and flanked in front by 3 denticles (see fig. 6). Outside the bases of the caudal filaments, a few strong spines are seen to project, and the hind concave edge of the segment is armed dorsally with about 6 small denticles, beyond which the soft skin, flanking the anal orifice, projects in the form of 2 short rounded lobes. In the specimen described by Messrs. Spencer & Hall, the terminal caudal segment is much more spinous, but it is most probable, that the number of spines increases with age.

The eyes (see fig. 1) are rather large and of the usual reniform shape, slightly converging anteriorly, and having here between them the ocellus, which shines distinctly through the integuments as a small dark spot. Immediately behind the eyes, the post-ocular tubercle is seen in the form of a nearly semicircular prominence.

The shell-glands are easily observable as 2 narrow, sabre-like areas extending obliquely along the sides of the carapace from the cervical furrow to some distance from the posterior corners.

The 1st pair of legs (fig. 2) exhibit the structure characteristic of the genus, the endites (excepting the rudimentary, scale-like 5th one) being much elongated and thread-like, and projecting laterally far beyond the edges of the carapace. The 4th endite, as usual, is much the longest, being fully twice as long as the stem, and, like the other 3, has the edges divided into small, spinulose ledges, exhibiting also in certain places a distinct segmentation. The outer appendages (exopodite and epipodite) are very small.

The 2nd pair of legs (fig. 3) are much more strongly built than the 1st, and are, as usual, more or less incurved, and prehensile in character, exhibiting a rather distinct segmentation. Of the endites, the 5th is well developed, though not quite attaining the length of the 4th, and has the form of a lanceolate claw, finely denticulated inside, and fringed outside with a row of delicate bristles. The 4th endite is scarcely more than half as long as the stem, the others still shorter and not exhibiting any trace of segmentation, though provided on the inner edge with minutely spinulose ledges. Of the outer appendages, the exopodite in particular is considerably larger than in the 1st pair, and is of a triangular form, the upper corner being exserted to an acute lappet.

In the next succeeding pairs of legs, the stem becomes gradually shorter, and its segmentation is at last wholly lost. Of the endites, the 5th somewhat increases in size, and assumes a lamellar character, whereas the other endites are much shortened and densely crowded together. Both the outer appendages, on the other hand, are rather fully developed.

The 11th pair of legs (fig. 4) do not exhibit, in the specimen examined, the slightest trace of the ovisac characteristic of the female, both the outer appendages being quite normally developed, and although the specimen had not, in all probability attained its full size, I am much inclined to believe that it was in reality of the male sex.

The total number of legs I have not been able to make out exactly, because the posterior pairs are so extremely small, and lie so close together as scarcely to admit of being counted without dissection.

The caudal filaments somewhat exceed half the length of the body, and exhibit the usual structure. In the living animal they were kept more or less strongly divergent, though they may also admit of being extended straight posteriorly, as indicated in the figure given by Messrs. Spencer & Hall.

The colour, in the living state of the animal, was light yellowish, semipellucid, with a very slight greenish tinge on the exposed part of the body. The edges of the carapace, and the several spines occurring on the body were of a fine chestnut colour. The eyes were dark brown. Within the exposed part of the body, the capacious intestinal tube was plainly seen, owing to its dark contents.

Remarks.—From the European species, *A. cancriformis,* Schäffer, of which I have had specimens for examination, the Australian form is chiefly distinguished by the greater number of caudal (non-limb-bearing) segments. In *A. cancriformis* I have never found more than 6 such segments, whereas their number in the Australian species is twice as large. It is also for this reason that the exposed part of the body in the latter species appears longer in proportion to the carapace. Otherwise the 2 species seem to be very closely allied.

Biological Observations.

I first observed the above-mentioned specimens on the 27th May in one of the smaller of my aquaria, prepared on the 17th of the same month. It was at that time still in the larval condition, though rather advanced, and of a reddish brown colour. It moved about along the bottom of the aquarium chiefly by the aid of the 2nd pair of antennæ, which, as in the larvæ of other Apodidæ, at this period constitute powerful biramose oars. In the course of the succeeding days it grew very rapidly, and before the close of the month it had attained almost double the size, the larval stages having been long before passed through. During the next month it was watched every day, and I had great pleasure in witnessing the rapid growth and the peculiar habits of the animal. It seemed to thrive exceedingly well, and was very voracious, feeding eagerly upon the small algæ contained in the aquarium. More frequently it was seen to move about along the bottom, with the back always upwards, and burrowing the frontal part more or less deeply into the mud. During its passage, the loose muddy particles were whirled up by the violent swinging movements of the legs, and thereby, apparently, feeding matter brought within reach of the mouth. At times it was seen to ascend the walls of the aquarium or the stems of plants growing in it, clinging with great dexterity to the outmost ramifications in search of food. It also not infrequently swam with great rapidity through the water, twisting about in all directions. The movements, which were extremely graceful, were chiefly effected by the rhythmical swinging of the legs, and generally constituted a rather even dart through the water; but this dart might be suddenly altered in any direction by the bending of the extremely flexible posterior part of the body. The epipodites and exopodites of the exposed legs were seen to be in uninterrupted rapid vibratory motion, apparently not coincident with the movements of the legs themselves; and by this means a constant renewal of the water beneath the carapace might be effected, to assist the respiratory process. The capacious intestinal tube was always filled with dark contents, and at times long coherent portions of the latter were seen to be expelled from the anal orifice. The animal casts its skin several times, and with each exuviation it increased considerably in size. No less than 6 more or less complete exuviæ were taken up from the aquarium, and preserved for subsequent examination. On the 29th June the individual showed trace of disease, and I therefore hastened to take it up for examination while still living. It was found that a sharp splinter of some weedy matter had penetrated the mouth, and probably injured the intestine, without the animal having been able to rid itself of it. The accompanying drawing was immediately executed, and subsequently the individual was carefully preserved, so as to retain its form, and partly also its colour, quite unaltered.

Trib. Concostraca. Fam. Limnadiidæ.

Gen. **Estheria**, Rüppel.

2. *Estheria elliptica,* G. O. Sars, n. sp.

(Pl. 2).

Specific Characters.—☿ Shell, seen laterally, of a rather regularly elliptical form, anything but equilateral, the umbones being placed far in front, dorsal margin behind the umbones nearly straight, and not angular behind, free edges of valves evenly curved throughout, both extremities being rounded and nearly equal, though the anterior one appears a little more obtuse than the posterior:—seen from above, rather tumid, greatest width in front of the middle, posterior extremity more pointed than the anterior. Valves of rather firm consistency, with 14 very strongly marked and elevated, ridge-like concentric lines of growth, each provided in their posterior part with short and stout bristles, surface between the lines finely and irregularly reticulate, marginal area rather broad, and furnished with numerous densely crowded concentric striæ, which are not at all raised. Upper surface of head bent at nearly a right angle close to the cervical impression, rostrum somewhat blunted at the tip. Number of legs 22—23 pairs. Tail of usual shape, with a single pair of dentiform projections at the base dorsally, caudal plates produced beneath into strong unguiform processes, and each having along the dorsal edge numerous (from 20 to 30) denticles of unequal size, caudal claws slender, without any setæ at the base, but having their outer part distinctly denticulated along the concave edge. Colour dark reddish brown. Length of adult female scarcely exceeding 5 mm.

Remarks.—At first I believed this form to be the *Estheria lutraria* of Brady, described by that author from a badly-preserved empty shell. Having however subsequently consulted Messrs. Spencer & Hall's paper, I have been induced to abandon this opinion. Brady's species is much larger, and, according to the statement of Messrs. Spencer & Hall, the armature of the tail is very different, each of the caudal plates having dorsally only 3 or 4 short denticles, whereas in the present species there is a very great number of such denticles. From *Estheria dictyon* of the above-named authors, it would also seem to differ both in the shape and sculpture of the shell, as also in the armature of the tail. From both these species it is, moreover, distinguished by the smaller number of legs. It is also very distinct from *Estheria Packardi* Brady, described in detail by the present author in another paper[1]).

Description of the female.

The length of the shell of a fully adult specimen measures only 4.9 mm., the greatest height 3.2 mm., and the greatest width 2.2. This form is accordingly far inferior in size to the previously described Australian species.

---

1) G. O. Sars, Description of some Australian Phyllopoda.

Seen laterally (fig. 1), the shell exhibits a rather regular, oblong elliptic form, the height scarcely exceeding $^1/_3$ of the length. It is anything but equilateral, the umbones occurring far in front, at about the end of the first 5th part of the length of the shell. As usual, the umbones are somewhat prominent, and the edges of the valves in front of them appear suddenly deflexed. The dorsal margin behind the umbones is nearly straight and slightly declining, and joins the hind edge without any intervening angle. The ventral margin is gently curved, and quite continuous with the anterior and posterior edges, which both appear evenly rounded.

Seen from above (fig. 2) the shell is found to be rather tumid, the greatest width almost attaining half the length, and occurring rather in front of the middle. Both extremities appear pointed, but the posterior one is much narrower than the anterior.

The valves are of rather firm consistency, with the outer layer strongly chitinous, and are each provided with 14 very conspicuous concentric lines, which form distinctly elevated ridges placed at rather regular distances from one another, the uppermost encircling the umbo. These ridges represent the primary lines of growth, and are in all probability present in the same number in all fully adult specimens. On a closer inspection, they each exhibit in their posterior part a row of short and stout bristles (see fig. 3). The interspaces between the lines are closely and irregularly reticulated. On the other hand, the rather broad marginal area is quite devoid of such reticulation, but is marked by a great number of closely-set concentric striæ, which are not at all raised (see fig. 3) These striæ represent the secondary lines of growth, and their number is probably very variable in different specimens, increasing with the age of the individual.

The enclosed animal (see fig. 4) appears on the whole of quite normal structure. In the shape of the head it agrees more closely with *E. dictyon*, the upper part of its dorsal face forming an almost rectangular bend at the cervical impression, whereas in *E. Packardi* this part is produced to a narrowly rounded lobe. The eyes are confluent, and placed within a well-marked bulging of the dorsal surface of the head about in the middle between the cervical sulcus and the tip of the rostrum. The latter appears somewhat blunted at the end, and from it ascends on each side the strongly marked fornix, which, at some distance beneath the ocular bulging, forms an almost angular bend. The ocellus can be only faintly traced at the base of the rostrum. The antennulæ are of moderate length and exhibit about 10 papilligerous lobes. The antennæ, or oars, are of the usual structure, both rami being composed of about 12 lamellar articulations carrying anteriorly short spines, posteriorly slender natatory setæ. The legs do not seem to exhibit any peculiarity in their structure; their number is only 22 or 23 pairs, the last 2 being extremely small. The tail (see fig. 5) resembles in shape that of *E. Packardi*, as described by the present author in the above-quoted paper. It has at the base dorsally 2 juxtaposed dentiform projections, from which extends on each side a row of 4 or 5 small denticles, the last occurring somewhat below the insertion of the caudal setæ. The caudal lamellæ are, as usual, produced into strong unguiform projections, which are not perfectly juxtaposed, and each of them has the slightly concaved dorsal edge armed with numerous (from 20 to 30) denticles of somewhat unequal size, small denticles being interposed between somewhat larger ones. The caudal claws are rather slender, and without any setæ at the base, whereas their outer part is distinctly denticulated along the concave edge.

The colour, in the living state of the animal, was a dark reddish brown, the concentric ridges of the shell being considerably lighter. From the umbones, moreover, an opaque whitish stripe was seen extending obliquely in front, and just behind it, between the 8th and 10th ridge an oval area was faintly traced, indicating the insertion of the adductor muscle of the shell.

Biological Observations.

Of this beautiful species some few specimens developed in my aquaria; but of these only a solitary individual attained full maturity. When first observed (on the 31st May), this individual had long since passed through the larval period, the shell showing already 2 or 3 lines of growth. It rapidly increased in size during the next month, the shell gradually acquiring at the same time a greater number of lines of growth, until 14 such lines, all very strongly marked, were counted. After that time apparently no more such lines were formed; but the marginal area was seen slowly to increase in size, so as at last considerably to exceed in width the interspaces between the lines of growth. On the 30th June the individual was taken up and subjected to a closer examination under the microscope. It showed itself at once to be a fully grown female carrying a very dense cluster of eggs inside the shell. After a coloured drawing had been made from the specimen, while still alive, it was carefully preserved for subsequent examination.

In habits it exactly agreed with *E. Packardi,* likewise observed by the present author in the living state. More frequently it was found lying quietly on the bottom of the aquarium, where it had burrowed more or less deeply into the loose mud; but at times it was seen to make some rapid excursions through the water, moving about rather violently in different directions, the back generally upwards. It casts its skin several times, and a rather large number of exuviæ were found in the aquarium, consisting of the skin of the whole body with its several appendages, as also the inner coating of the shell.

Trykt den 12te December 1896.

Cladocera.

Trib. Anomopoda. Fam. Daphnidæ.

Gen. **Moina**, Baird.

3. *Moina flexuosa*, G. O. Sars, n. sp.

(Pl. 3.)

Specific Characters.—Carapace with the dorsal part, in gravid female specimens, often very much, almost globularly expanded, ventral edges of valves highly flexuous, bulging in the middle to an obtuse prominence, behind which is a distinct, though rather shallow sinus. Head in female not very large, but remarkably erect, seen laterally triangular in form, with the ventral margin nearly straight and continuous with the labrum, frontal part narrowly rounded and somewhat prominent, supra-ocular sinus very slight, cervical impression strongly marked. Eye of moderate size. Antennulæ of female about half the length of the head, subfusiform, sensory bristle of the anterior edge situated nearly in the middle. Caudal claws perfectly smooth, ante-anal denticles about 8 on each side, the outmost placed at some distance from the others, and, as usual, bidentate. Ephippium with only a single egg-ampulla placed longitudinally. Male resembling that of the other species, but having the ventral edges of the valves flexuous in a similar manner to that in female. Body in both sexes highly pellucid, having sometimes, in larger female specimens, a slight rosy tinge. Maximum length of female 0.9 mm, of male 0.5 mm.

Remarks.—This new species may be easily distinguished from any of the other known Moinæ by the peculiar, flexuous bend of the ventral edges of the valves, as also by the form of the head in the female.

Description of the female.

The average length of fully adult, ovigerous specimens is from 0.7 mm. to 0.8 mm. The largest specimen found in my aquaria measured 0.9 mm., and it is therefore most probable, that this form never exceeds a length of 1 mm. It is accordingly by far the smallest of the 4 as yet known Australian species.

The general form of the body (see figs. 1 & 2) agrees on the whole with that of the other species of the genus, being rather short and stout, with the head and carapace very sharply marked off from each other.

The shell or carapace, which is defined dorsally from the head by a deep depression, has the dorsal part often enormously expanded, in order to make room for the numerous developing young ones. When these are ready to escape from the matrix, that part is sometimes found to project as a large, almost globular pouch sharply defined from the true valvular part, which in all specimens preserves its form quite unaltered. At the junction between the two, the carapace projects posteriorly to a short obtuse prominence, immediately below which there is a slight notch in the hind edges. The ventral edges of the valves, which in all other known species appear almost straight and horizontal, are in the present form rather irregularly flexuous, projecting in the middle to an obtuse prominence, behind which the edges appear slightly concave, before joining the posterior margin. In front of the median prominence the edges are clothed with delicate bristles, and just within the margin a cellular stratum occurs similar to that found in other species. I have, however, failed to detect on the valves any trace of the usual irregular striation.

The head is comparatively small and, seen laterally (fig. 1), of a somewhat triangular outline. It is remarkably erect, not, as in the other known species, procumbent, and has the frontal part rather prominent and narrowly rounded at the tip, with only a very slight indication of a sinus above. The ventral margin of the head is nearly straight and horizontal, being continuous with the labrum; the dorsal margin appears slightly vaulted. Seen from above (fig. 2), the head appears rather broad, subpentagonal in form, with the greatest width about equalling the height, and the front obtusely rounded. The fornix is well defined, though not very prominent, and occurs just above the base of the oars.

The eye, occurring just within the frontal part, is not particularly large, exhibiting, however, the usual structure. As in the other species, no trace of an ocellus is to be detected.

The antennulæ (fig. 3) equal about half the length of the head. They are, as in the other species, freely mobile and of a subfusiform shape, with the posterior edge finely ciliated. The sensory bristle of the anterior edge occurs about in the middle. The apical olfactory papillæ are very small.

The antennæ or oars (see figs. 1 & 2) are powerfully developed, and agree in their structure exactly with those in the other species of the genus. At their base exteriorly 2 remarkably large, juxtaposed setæ occur pointing straight outwards.

The tail, which, as usual, does not admit of being wholly withdrawn between the valves, but is constantly seen projecting behind them, exhibits the structure characteristic of the genus. At about the middle, the posterior, or dorsal edge forms a conspicuous bulging, and at this place the anal orifice occurs. The outer part of the tail, beyond the anal orifice (see fig 4), is conically tapered, and carries on each side a series of about 8 denticles, the outermost of which is placed at some distance from the others and terminates in 2 unequal points. The remaining 7 denticles are very delicate, somewhat flattened, and finely ciliated on both edges. The caudal claws are of moderate length and perfectly smooth, without a trace of secondary denticles. The caudal setæ somewhat exceed the tail in length, and are distinctly biarticulate and densely ciliated.

The ephippium, seen laterally (fig. 5), is of an oval triangular form, being broadly rounded in front, and conically produced behind. It is very coarsely sculptured in the centre with raised knob-like prominences, and always contains but a single egg-ampulla placed longitudinally.

The adult male (fig. 6) is scarcely more than half as large as the female, and on the whole resembles the males of the 3 other Australian species, though it may be at once distinguished from them by the peculiar bend of the ventral edges of the valves, which exactly agrees with that found in the female. The head is comparatively much larger than in the female, and appears obtusely truncated in front, forming between the bases of the antennulæ a well-marked obtuse prominence.

The antennulæ, as in the males of the other species, are very powerfully developed, fully equalling half the length of the body. Their basal part is somewhat thickened, and contains a strong muscular band passing through it diagonally. From the place where this muscle terminates, springs the sensory bristle of the anterior edge, and immediately inside it, a small hook-shaped denticle is seen projecting inwards. The outer part of the antennula is rather narrow and more or less curved, so as to meet, with its tip, the corresponding antennula on the other side, when bent in. Each antennula is armed on the obtusely rounded end with 4 strongly curved hooks, between which the usual fascicle of olfactory papillæ may be discerned (see fig. 7).

The structure of the 1st pair of legs and that of the testes seems to agree with that found in *M. australiensis* and *tenuicornis*.

In both sexes the body is highly pellucid and almost colourless. Only in large female specimens, a more or less distinctly rosy tinge may sometimes be observed. The egg contained in the ephippium is of a brick-red colour.

Biological Observations.

Of this form at first only a comparatively small number of female specimens were hatched in some of my aquaria. In the course of a few days they reached maturity, and began to propagate in the usual parthenogenetical manner, several successive generations of this kind being observed, whereby the number of specimens increased considerably. But at the same time the fertility of the individuals diminished conspicuously, and after the lapse of some time, the bisexual or gamogenetic period was seen to have set in, the greater number of the females now having the ovaries filled with a brick-red contents and showing traces of the ephippial formation. At this time, male specimens were observed in great numbers, eagerly pursuing the females, and at times getting hold of them for copulation. The ephippia were soon formed, and successively dropped to the bottom, where they were subsequently easily detected, on account of the brick-red egg contained in each of them. The individuals now gradually diminished in number, and at last wholly disappeared, no specimens reappearing later in the season. It would therefore seem, that this form, unlike what is the case with the 2 Sydney species previously described by the present author, is «monocyclar» in character.

In habits, this form agrees with the other species, and moves in a similar jerky manner, though it is on the whole less active, especially in the later generations.

Ostracoda.

Trib. Podocopa. Fam. Cyprididæ.

Gen. **Cyprinotus**, Brady.

4. *Cyprinotus Dahli*, G. O. Sars, n. sp.
(Pl. 4, figs. 1—5).

Specific Characters.—Shell, seen laterally, ovoid in form, greatest height occurring behind the middle, dorsal margin boldly arched, and declining gradually in front, more steeply behind, ventral margin without any sinus, being on the contrary slightly convex in the middle; anterior extremity somewhat produced and obliquely truncated at the end from the front backwards, posterior extremity obtusely rounded:—seen from above, moderately tumid, greatest width behind the middle and almost attaining half the length, anterior extremity considerably narrower than the posterior. Valves rather unequal, the left one being more convex than the right, and overlapping it at each extremity by a narrow pellucid rim, whereas dorsally it is itself overlapped to some extent by the right one. Anterior and posterior edges of right valve distinctly tuberculated inside. Surface of shell very smooth and shining, clothed with hair only at each extremity. Caudal rami perfectly straight, slightly tapering distally, outer claw exceeding half the length of the ramus. Colour of female light yellowish clouded dorsally with dark sepia, that of male generally more uniformly light brown. Length of female 1.40 mm, of male 1.20 mm.

Remark.—There cannot be any doubt that this form ought to be referred to the genus *Cyprinotus* of Brady, as defined by the present author in another paper[1]), agreeing as it does, in all essential anatomical details, as also in the structure of the shell, with the other species belonging to this genus. Yet it exhibits well-marked specific differences from any of them. For instance, the form of the shell is more regularly ovoid than in the other known species, and its anterior extremity appears truncated in a most peculiar manner. Moreover, the right valve in adult specimens of both sexes is raised considerably above the level of the left, a circumstance only found in *C. cingalensis,* but here in a still more marked manner. Finally, the colour is different from that in the other species. I am now of opinion, that the *Cypris aurea,* described by the present author from South Africa, should also more properly be referred to the same genus, because the structure of the valves is essentially the same, and because also this species is pronouncedly gamogenetic in character.

Description of the female.

The shell in fully grown specimens attains a length of 1.40 mm., a height of 0.90 mm., and a width of 0.70 mm. Accordingly, this form grows to a somewhat larger size than the 2 other Australian species, *C. dentato-marginatus* and *C. cingalensis.*

---

1) G. O. Sars, On some Australian Fresh-water Ostracoda and Copepoda raised from dried mud.

Seen from the side (fig. 1), the shell exhibits a rather regular ovoid form, with the greatest height about equalling $^3/_5$ of the length, and occurring behind the middle. The anterior extremity is somewhat produced and truncated at the end from the front backwards, a circumstance very seldom found in the Cyprididæ. The posterior extremity is much shorter, and obtusely rounded at the tip. The dorsal margin forms a bold and rather regular curve, having its highest point considerably behind the middle. Thence it slopes quite gently towards the front edge, whereas behind it curves more steeply to the posterior extremity. The ventral margin does not exhibit any median sinus, but is, on the contrary slightly convex, in the middle. It joins the anterior and posterior edges without any intervening angle.

Seen from above (fig. 2), the shell appears rather more tumid than in the other 2 Australian species, the greatest width, which occurs considerably behind the middle, almost attaining half the length. Both extremities appear obtusely pointed, but the anterior one is much narrower than the posterior and slightly twisted at the tip.

The valves, as in the other species of the genus, are rather unequal, the right one being conspicuously more convex than the left, and overlapping it at both extremities by a thin hyaline border, which, especially on the anterior extremity, is rather broad. Ventrally also, the left valve is found to overlap the right considerably, and this is the reason why the usual ventral sinus does not appear in the lateral aspect of the shell. On the other hand, the right valve projects dorsally to some extent beyond the left one in a manner similar to that found in *C. cingalensis*. On viewing the shell from the left side (fig. 1), therefore, a part of this valve is seen raised above the hinge, though not forming such a pronounced gibbous prominence as in the last-named species. Whereas the left valve has the edge quite smooth throughout, the right one, as in all other species belonging to this genus, has, inside the anterior and posterior extremities, a series of small tubercles, giving this part of the edge a minutely crenulated appearance.

The surface of the shell is perfectly smooth and polished, with only the usual small scattered pits, and is hairy only at each extremity. In the centre of each valve the impressions of the adductor muscle of the shell are easily observable, exhibiting the usual number and arrangement.

The colour of the shell is light yellowish, sometimes with a slight olivaceous tinge, and clouded dorsally, behind the eye, with dark sepia. The cæcal appendages of the intestine shine through the shell with a dark green colour, and just above them the shell generally exhibits a reddish orange tinge caused by the ripe ova accumulated within the body.

The eye is seen fairly well through the shell; it is of moderate size and normal structure.

The several appendages of the body almost exactly agree in their structure with those in *C. dentato-marginatus,* as described in detail by the present author in his above-quoted paper.

The caudal rami (fig. 4) are of moderate length and quite straight, tapering slightly distally. They are armed in the usual manner, each having at the tip 2 unequal, slender claws, the outer of which is the longer, and somewhat exceeds half the length of the ramus. Just in front of it, there is a rather small bristle, and at a short distance from the proximal claw, the somewhat longer dorsal bristle is seen to originate.

The adult male (fig. 3) is of somewhat smaller size than the female, scarcely exceeding a length of 1.20 mm., and has the shell comparatively shorter, with the dorsal margin still more boldly curved. It may, moreover, at once be recognized by the darker brownish colour, and by the spermatic vessels shining more or less distinctly through the shell. These vessels are arranged in exactly the same manner as in the male of *C. dentato-marginatus,* forming in the posterior part of each valve 4 densely crowded coils, whereas a single vessel is sent off in front, and runs along the anterior extremity.

The palps of the posterior maxillæ are, as is usual in male specimens, transformed into strong grasping organs, and resemble in shape those in the above-named species, being rather dissimilar on the two sides. The outer sexual appendages (fig. 5) have also much the same appearance as in that species.

Biological Observations.

This beautiful species, which I have much pleasure in dedicating to Mr. Knut Dahl, to whom I am indebted for its examination, developed in great abundance in some of my aquaria, and has been watched in several successive generations. At first, however, only some few specimens, males and females, appeared in each of the aquaria; but these rapidly multiplied, and at last gave rise to a vast progeny. At the time when this is written (in the beginning of October), the aquaria still swarm with this Ostracod, and it is my intention to keep them for subsequent observation.

As to habits, it is a very active animal, swimming about with great speed by the aid of the long natatory setæ issuing from both pairs of antennæ. Especially during the warmest part of the summer, when the aquaria were exposed to the direct rays of the sun, did the specimens move with extraordinary rapidity, now and then stopping in order to feed on some nourishing matter. In proportion as the weather became colder, the animals assumed a somewhat more sluggish habit, and were more frequently seen keeping at the bottom, more or less deeply buried in the loose mud, and only at times moving freely through the water. Male and female specimens occurred during the whole season in about equal numbers, and both were very often seen in copulation. This form, indeed, is pronouncedly gamogenetic in character, like the other known species of the genus.

Gen. Cypris, Müller.

5. *Cypris oblongata,* G. O. Sars, n. sp.

(Pl. 4, figs. 6—9).

Specific Characters.—Shell, seen laterally, oblong subreniform, greatest height not attaining half the length, and occurring in front of the middle, anterior extremity broadly rounded, posterior considerably narrower, and obtusely produced, dorsal margin in female rather evenly arched, in male nearly straight in the middle, with an indication of angle in front and behind, ventral margin distinctly sinuated:—seen from above, moderately tumid, oblong fusiform in outline, greatest width not attaining the height, and occurring in front of the middle, posterior extremity considerably narrower than the anterior. Valves nearly equal, the left one having a very narrow hyaline border at each extremity, right valve without any marginal tubercles.

Surface of shell perfectly smooth, and but slightly hairy at each extremity; inner duplicatures narrow. Caudal rami of moderate size and somewhat curved, outer claw about half the length of the ramus. Posterior coil of spermatic vessels in male forming in the ventral part of each valve a remarkable bend in front. Colour of female light yellowish, with a dark brown patch above the insertion of the adductor muscle of the shell, generally drawn out behind into 2 narrow bands, the lower one occurring just above the cæca of the intestine, the upper one near the dorsal face; ocular region more or less tinged with light chestnut. Colour of male darker brown. Length of female 1.9 mm., of male 1.6 mm.

Remarks.—I have only provisionally referred this form to the genus *Cypris* (sens. strict.); for in one character, at least, it seems to differ very markedly from the other species. Whereas all these, as far as I know, are parthenogenetic in character, the present species has turned out to be as pronouncedly gamogenetic as the species of the genus *Cyprinotus*. It cannot, however, by any means be referred to the latter genus, because the shell does not exhibit any of the characteristic features peculiar to that genus. In the narrow oblong shape of the shell it somewhat recalls the species of the genus *Stenocypris;* but the caudal rami do not agree in structure with those in the latter genus, the species of which, moreover, are pronouncedly parthenogenetic in character.

Description of the female.

The shell of the largest female specimen examined measures in length 1.9 mm , in height 0.8 mm., and in width

0.74 mm. This form accordingly grows to a rather larger size than the species of *Cyprinotus* described above.

Seen from the side (Pl. 4, fig. 6), the shell exhibits a somewhat irregular oblong reniform or slightly clavate shape, with the greatest height not nearly attaining half the length, and occurring considerably in front of the middle. The anterior extremity appears broadly and regularly rounded, whereas the posterior one is considerably narrower and terminates in a slightly deflexed, obtuse prominence. The dorsal margin is gently arched, with its greatest curvature somewhat behind the ocular region, from whence it declines with a nearly straight course to the front edges. In its most posterior part it exhibits an indication of a sinus just above the obtusely produced hind extremity. The ventral margin is evenly concaved a little in front of the middle, and joins the anterior and posterior edges without any intervening angle.

Seen from above (fig. 7), the shell appears moderately tumid and oblong fusiform in outline, with the greatest width about equalling $^2/_5$ of the length, and occurring somewhat in front of the middle. The lateral contours are quite evenly curved, and both extremities pointed, though the posterior one is considerably narrower than the anterior.

The valves are nearly equal, though, on a closer examination, the left one is found to overlap the right at both extremities by a very narrow, hyaline border. The edges of both valves are perfectly smooth, and the inner duplicatures rather narrow.

The surface of the shell is smooth and polished, without any obvious sculpturing, and it is clothed at each extremity with scattered short hairs.

The natatory setæ on the antennæ are very long and finely plumose, those of the inferior antennæ reaching considerably beyond the terminal claws. The oral parts and the legs are of normal structure, nearly agreeing with those parts in the other species of the genus *Cypris* (sens. strict.).

The caudal rami (fig. 9) are not particularly large, and exhibit at the base a very pronounced curve. They have the dorsal edge quite smooth, and carry at the end the 2 usual claws and 2 small bristles, the one apical, the other dorsal. The claws are perfectly smooth, the outer one being, as usual, the larger, though scarcely exceeding half the length of the ramus.

In the living state of the animal, the shell exhibits a light yellowish colour, with a very conspicuous dark brown patch in the dorsal part of each valve, above the insertion for the adductor muscle. This patch is generally drawn out behind into 2 narrow diagonal bands, the lower of which has a somewhat lighter reddish brown colour, and occurs just above the cæcal appendage of the intestine, whereas the upper one lies near the dorsal face. Between the two, a pale orange tinge may be observed, caused by the ripe ova accumulated within the body. In the region of the eye the shell is generally tinged with light chestnut. The cæcal appendages of the intestine shine through the shell with a bluish green colour.

The adult male (fig. 8) is somewhat smaller than the female, scarcely exceeding a length of 1.6 mm, and it slightly differs in the shape of the shell. In a lateral view, the latter appears comparatively shorter in proportion to its height, and less narrowed behind. The dorsal margin is less regularly curved, being almost straight in the middle, and exhibiting a slight indication to an angle in front and behind. Male specimens may, moreover, be at once recognized by the somewhat darker brown colour of the shell, and by the spermatic vessels shining more or less distinctly through the valves. As usual, the greater number of these vessels is accumulated in the posterior part of each valve, there forming a close, winding coil, which however in the present form exhibits this peculiarity, that its end is bent forward for some distance along the ventral part of the shell (see fig. 8).

Biological Observations.

Of this pretty species some few specimens, males and females, developed in 2 of my aquaria, and were watched for some time. They did not, however, multiply to any great extent, and before the end of the summer they had wholly disappeared. A limited number of specimens, however, were previously secured and preserved for closer examination. In habits it agrees with the other species of the genus *Cypris,* being rather agile and admirably well adapted for swimming, though more generally it kept near the bottom of the aquarium. Males and females occurred in about equal numbers, and copulation was very often seen to take place, showing the species to be pronouncedly gamogenetic in character.

Trykt den 19de November 1896.

Explanation of the Plates.

Pl. I.

Apus australiensis, Spencer & Hall.

Fig. 1. Young (male?) specimen, drawn from life, and viewed from above; magnified about 9 diameters.
» 1 a. Same, natural size.
» 2. Leg of 1st pair; magnified 19 diameters.
» 3. Leg of 2nd pair.
» 4. Leg of 11th pair.
» 5. Extremity of tail with bases of the caudal filaments; dorsal view.
» 6. Left dorsal sensory knob of the terminal segment; highly magnified.

Pl. 2.

Estheria elliptica, G. O. Sars.

Fig. 1. Shell of adult female, viewed from left side; magnified about 16 diameters.
» 2. Same, dorsal view.
» 3. Part of left valve, more highly magnified, to show the peculiar sculpturing of the shell.
» 4. Right valve with enclosed animal (the left valve being removed), lateral aspect; magnified 22 diameters.
» 5. Tail with adjoining part of trunk, seen from left side; magnified 52 diameters.

Pl. 3.

Moina flexuosa, G. O. Sars.

Fig. 1. Adult, gravid female, viewed from left side; magnified 80 diameters.
» 2. Same, dorsal view.
» 3. Antennula, more highly magnified.
» 4. Outer part of tail, lateral view.
» 5. Ephippium from left side.
» 6. Adult male, lateral view; magnified 140 diameters.
» 7. Extremity of an antennula of same, more highly magnified.

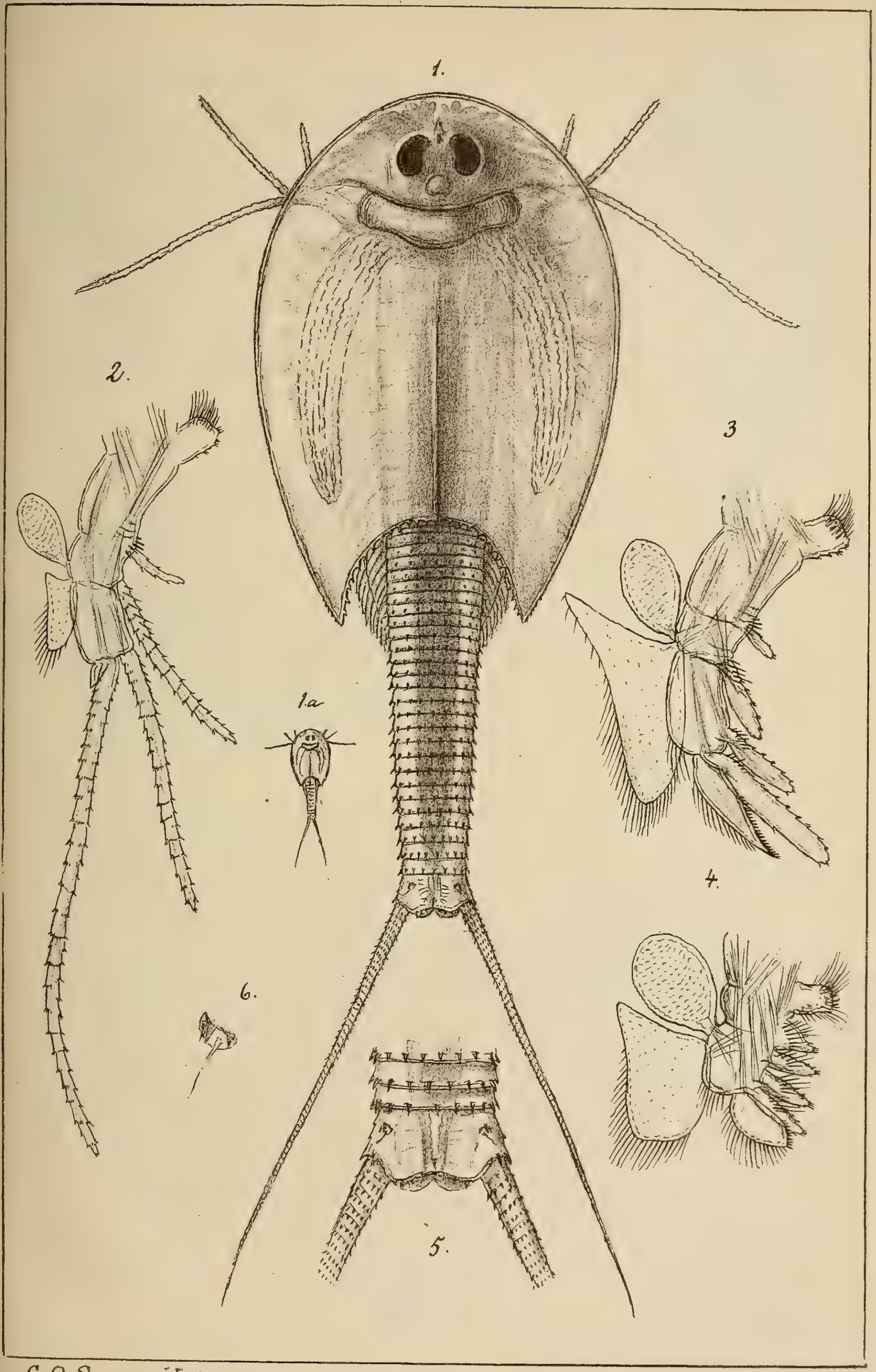
Pl. 4.

Cyprinotus Dahli, G. O. Sars.

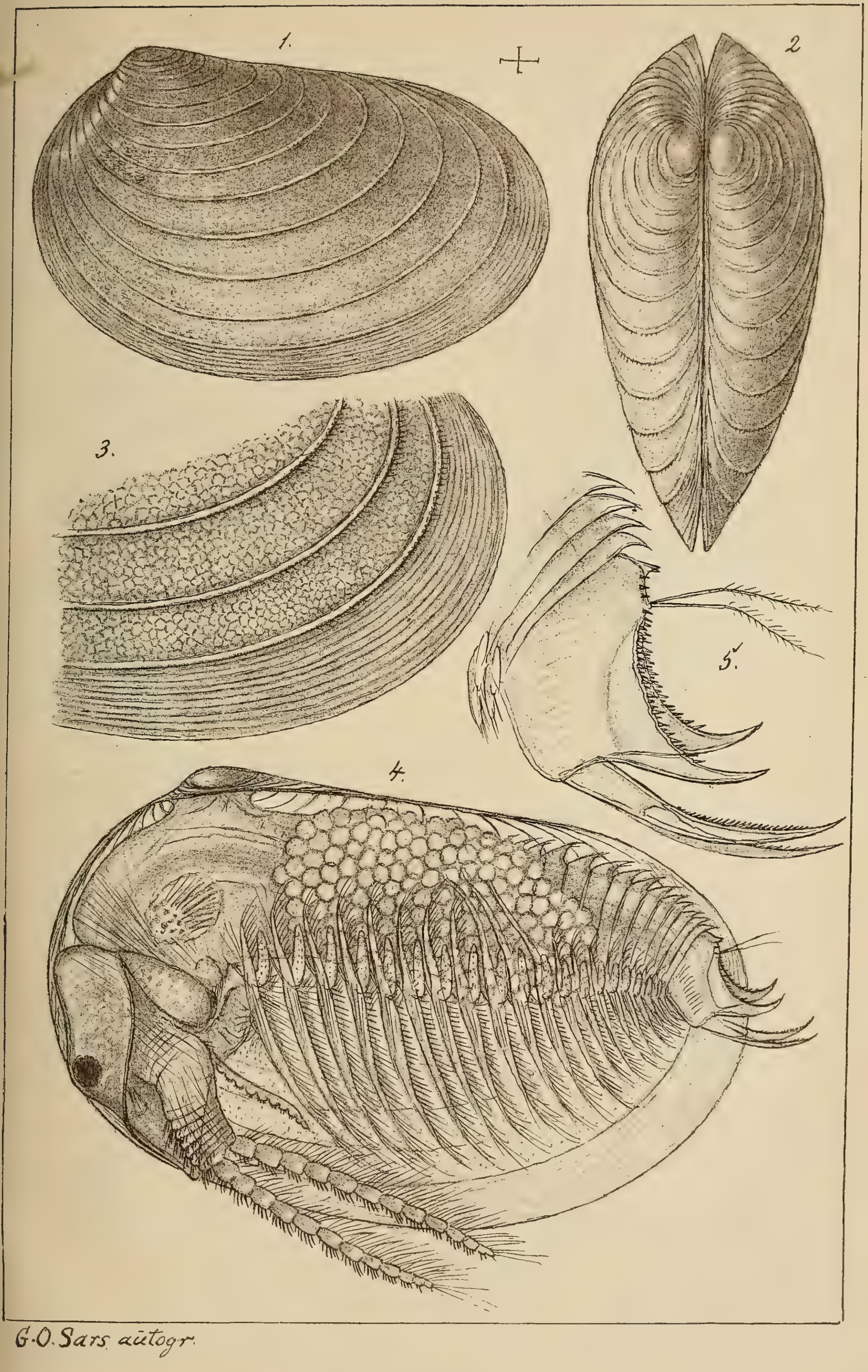
Fig. 1. Adult female, from left side; magnified 52 diameters.
» 2. Same, dorsal view.
» 3. Adult male, from left side.
» 4. Caudal ramus.
» 5. Left half of outer sexual apparatus, lateral view.

Cypris oblongata, G. O. Sars.

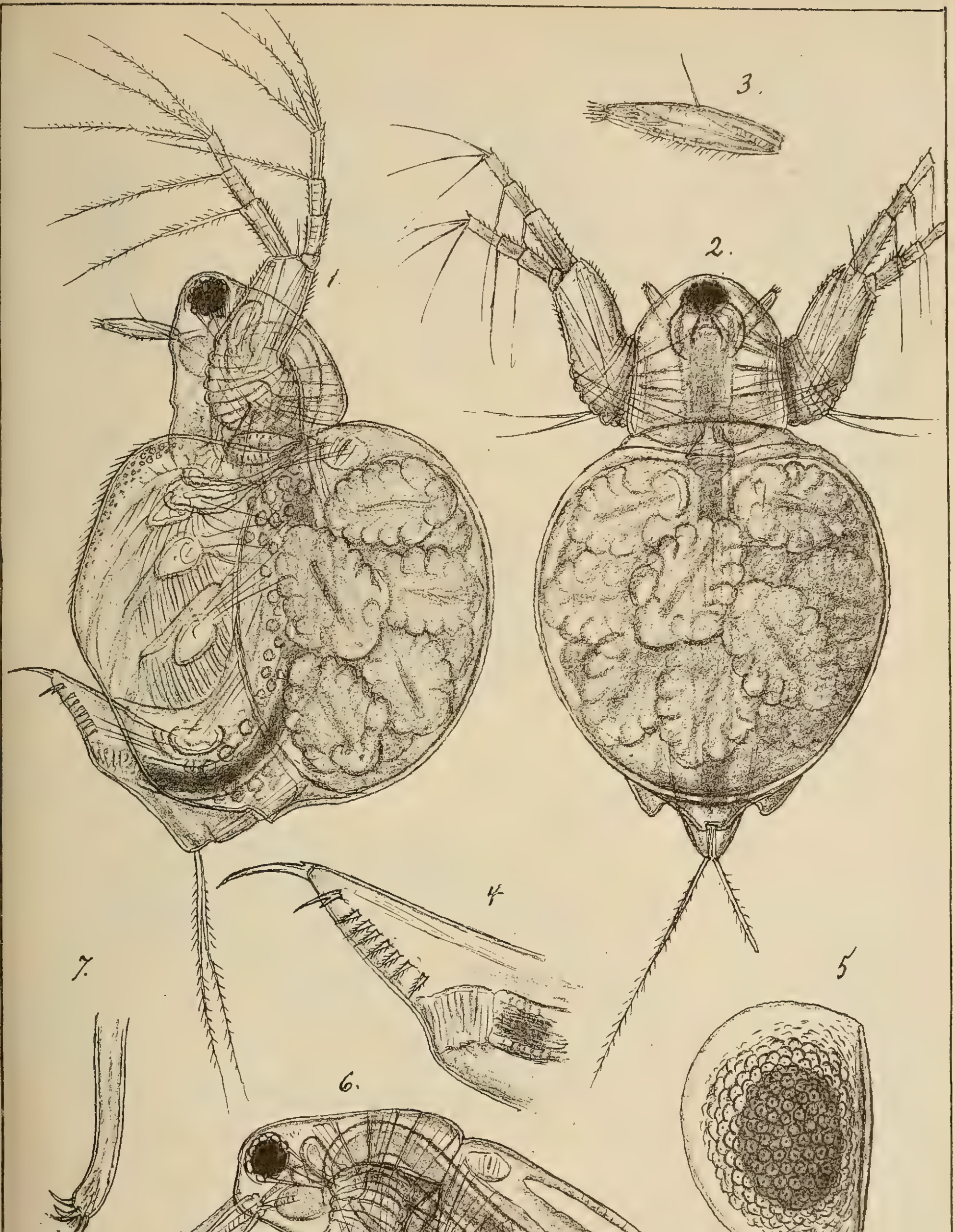
» 6. Adult female, from left side; magnified 44 diameters.
» 7. Same, dorsal view.
» 8. Adult male, from left side.
» 9. Caudal ramus.



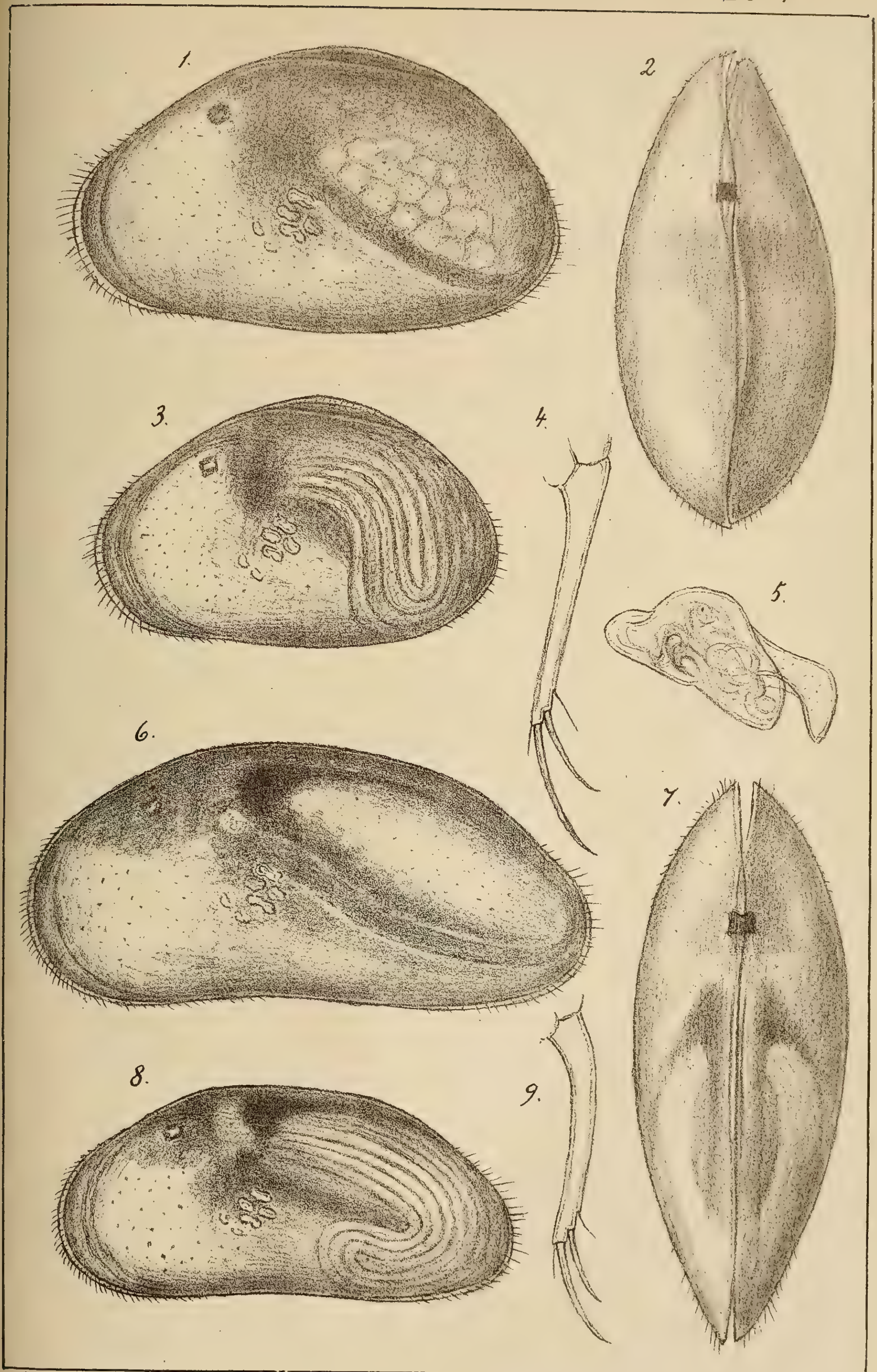
G. O. Sars autogr.



G.O. Sars autogr.



G. O. Sars autogr.



G.O. Sars autogr.

OM

ACETON SOM STOFVEXELPRODUKT

EXPERIMENTEL-FYSIOLOGISKE
STUDIER

AF

H. CHR. GEELMUYDEN

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1896.

(Fra universitetets fysiologiske Institut.)

Om aceton som stofvexelprodukt.

Experimentel-fysiologiske studier

af

H. Chr. Geelmuyden.

Acetonet eller *dimetylketonet,* CH_3 - CO - CH_3, har allerede længe været kjendt som et hyppigt optrædende spaltningsprodukt af en række organiske substanser. Det dannes i mængde ved tør destillation af saagodtsom alle kulhydrater, af flere stoffe af de fede legemers gruppe, navnlig edikkesur kalk og citronsyre, fremdeles ved oxydation af æggehvidestoffe.

Af acetonets egenskaber vil jeg blot minde om, at det er en vandklar væske, der koger ved 56,5° C. og ved 0° har en specifik vægt af 0,81. Det er opløseligt i vand, alkohol og æther og har en eiendommelig, om pebermynteolje mindende lugt.

Som produkt af organisk liv er acetonet hidtil kun paavist som bestanddel af blodet og excreterne hos mennesker og dyr, første gang i aaret 1857, da *Petters*[1]), assistent paa den ældre *v. Jaksch's* klinik i Prag, fandt det i urinen og exspirationsluften hos diabetikere. Hans iagttagelser

Trykt den 19de November 1896.

bekræftedes og udvidedes af hans efterfølger i samme stilling, *Kaulich*[2]), der paaviste aceton i urinen ikke alene hos diabetikere, men ogsaa i andre sygdomstilfælde.

Ledede af den iagttagelse, at acetonurinen sædvanligvis optraadte samtidig med sygdomme i tarmkanalen, antog de, at det dannedes sammesteds ved gjæring af kulhydraterne i næringen. Denne antagelse har imidlertid senere iagttagelser gjort usandsynlig. Efterat nemlig *Gerhardt*[3]) i 1865 havde opdaget, at urinen hos diabetikere hyppig farvedes rød ved tilsætning af jernchlorid, paaviste *Deichmüller*[4]), *Tollens*[5]) og *v. Jaksch*[6]) (den yngre), at denne reaktion skyldes *acetedikkesyren* eller *diacetsyren* (CH_3 - CO - CH_2 - COOH), et stof, som i chemisk henseende staar acetonet nær, som blandt andet meget let spaltes i kulsyre og aceton. Efterhaanden fandtes disse stoffe i en hel række af de mest forskjelligartede sygdomstilstande, ogsaa i saadanne, i hvilken ingen affektion af tarmkanalen kunde paavises — og det blev mere og mere sandsynligt, at man her stod overfor to i genetisk henseende beslægtede produkter af et pathologisk forandret stofskifte.

I størst mængde optræder disse stoffe i sukkersyge *(Kussmaul*[7]*), Rupstein*[8]*), Quincke*[9]*), v. Buhl*[10]*), Ebstein*[11]*), Jaenicke*[12]*)* o. fl.). De øvrige sygdomme, i hvilke de er paavist, er alle febrile sygdomme *(v. Jaksch*[6]*), Litten*[13]*), v. Engel*[14]*), Lorenz*[15]*))*, kræftsygdomme, forstyrrelser i digestionstraktus *(Lorenz*[15]*))*, Forgiftninger *(G. Hoppe-Seyler*[16]*), Tuczeck*[17]*), Senator*[18]*))*, forskjellige tilstande forbundne med nervøse paroxysmer tydede som symptomer paa autointoxikation *(epilepsia acetonica: v. Jaksch*[6]*), asthma acetonicum: Pawinski*[19]*)*, puerperal aclampsi: *Stumpf*[20]*))*, forskjellige sygdomme hos børn, blandt andre eclamptiske anfald *(Baginski*[21]*))*, i hungertilstand, baade frivillig *(Fr.*

Müller[22]) og som følge af strikturer i tarmtraktus og næringsvægring hos sindssyge (*Fr. Müller*[23]), *v. Jaksch*[6]), *Tuczeck*[24]) o. fl.). I ringe mængde findes aceton ogsaa i blodet og urinen hos sunde mennesker (*v. Jaksch*[6])).

Ebstein[11]) og *Jaenicke*[12]) paaviste, at absolut kjøddiæt hos diabetikere frembragte acetonuri og diaceturi, en iagttagelse, som senere stadig har bekræftet sig og givet stødet til en række undersøgelser over de forskjellige næringsstoffes evne til at fremkalde acetonuri (*Ephraim*[25]), *Honigmann*[26]), *Friedländer*[27]), *Hirschfeld*[28]), *Rosenfeld*[29-30])). Af disse er fremgaaet som resultat, at ren æggehvidekost, særlig en mindre rigelig (*Hirschfeld*[28]), *Rosenfeld*[30])) saavel hos sunde mennesker som hos diabetikere fremkalder acetonuri. Ligeledes fremkaldes acetonuri ved blandet æggehvide- og fedtkost (*Hirschfeld*), derimod ikke, naar næringen indeholder kulhydrater. Især deleshed fremhæver *Hirschfeld* og *Rosenfeld*, at en acetonuri aldrig opstaar, naar der omsættes en vis mængde kulhydrater i legemet. Begge antager, at aarsagen til acetonurien hos diabetikere er at søge deri, at evnen til at omsætte kulhydrater hos dem er nedsat. Den sidste anbefaler endog at give diabetikere kulhydrater for at bringe en bestaaende acetonuri til at svinde.

Hos dyr er acetonuri og diaceturi iagttagne efter pancreasexstirpation (*Minkovski*[31])) og ved forgiftning med phloridzin (*v. Mering*[32])) samt ved læsioner af nervøse organer, saaledes ved exstirpation af plexus coeliacus hos kaniner, sukkerstik hos hunde o. s. v. (*Lustig*[33]), *Oddi*[34]), *Peiper*[35])), derimod ikke hos hungrende dyr (*Külz*[36])).

I de forsøg, som er gjort paa at klargjøre acetonets og diacetsyrens betydning som stofvexelprodukter, fæstede man sig tidligere væsentlig ved den omstændighed, at acetonuri og diaceturi hos mennesker fremkaldes ved hunger og absolut kjøddiæt. Deraf troede man at kunne slutte, at de opstaar i organismen ved spaltning af æggehvidelegemer, en antagelse, som *Honigmann*[26]) og *v. Noorden*[37]) nærmere har villet præcisere derhen, at de kun opstaar ved spaltning af «organæggehvide», ikke af æggehviden i næringen. De hævder, at acetonuri og diaceturi kun optræder ved saadanne tilstande, i hvilke organismen udskiller mere kvælstof, end den optager i næringen, saaledes ved absolut og relativ hunger, ved feber o. s. v. At acetonuri og diaceturi kan fremkaldes ved ren kjødkost, forklares paa den maade, at en saadan kost i virkeligheden for mennesker altid betinger en relativ inanition, da mennesker ikke paa langt nær kan fordøie og resorbere saa meget æggehvide, som skal til, for at dække deres kaloriske behov.

Denne hypothese hyldes, som det synes, af de fleste klinikere og refereres i alle nyere lærebøger. I de seneste arbeider over acetonuri, i hvilke manglende omsætning af kulhydrater stilles i forgrunden som et af dens væsentligste aarsagsmomenter, er den imidlertid forladt. *Weintraud*[38]) konstaterer kvælstofligevægt hos en diabetiker med acetonuri. *Rosenfeld*[30]) anser vistnok endnu acetonet og diacetsyren som derivater af en æggehvidespaltning, men gjør i saa henseende ingen forskjel paa næringens og legemets egne æggehvidestoffe.

De forskjellige hypotheser om acetonets og diacetsyrens oprindelse udstrækkes i almindelighed ogsaa til at gjælde *β-oxysmørsyren*. Denne paavistes i 1884 omtrent samtidig af *Külz*[39]) og *Minkowski*[41]) i urinen hos diabetikere. Senere er den hyppig funden saavel hos diabetikere (*Külz*[40]), *Wolpe*[42])) som i andre sygdomme, der er forbundne med acetonuri og diaceturi, saaledes ved acute exanthemer og hos sindssyge med næringsvægring *(Külz*[40]*)*. Hos hunde optræder den ved phloridzindiabetes *(v. Mering*[32]*)* og ved pankreasexstirpation *(Minkowski*[31]*)*.

β-*oxysmørsyrens* kemiske formel er $CH_3 - CH(OH) - CH_2 - COOH$. Den af urinen hos diabetikere fremstillede β-oxysmørsyre dreier polarisationsplanet tilvenstre ($[\alpha]_D = -23{,}4°$ *Külz*[40]*)*. En optisk inaktiv syre kan fremstilles ved reduktion af diacetsyrens æthylesther med natriumamalgam *(Wislicenus*[43]*)*. Begge syrer spaltes ved destillation i α-crotonsyre og vand.

At acetonet, diacetsyren og β-oxysmørsyren er produkter af stofskiftet, og at ialfald de to første med hensyn til sin oprindelse staar hinanden nær, tør ansees utvivlsomt, efter hvad man ved om deres optræden i excreterne. Spørgsmaalet om deres dannelse og forhold under stofomsætningen i organismen faar da stor fysiologisk interesse. For en fysiologisk betragtning er det imidlertid ikke tilstrækkeligt at henvise til, at de nævnte stoffe kan være «spaltningsprodukter» af næringsstoffe eller organbestanddele. Det maa erindres, at skjønt stofskiftet i det store og hele taget er en række analytiske og oxydative processer, saa taler dog mange erfaringer for, at der sideordnet med disse foregaar synthetiske processer, ved hvilke stoffe af mere eller mindre forskjellig oprindelse indgaar forbindelser. De slutprodukter af stofskiftet, som udskilles gjennem excreterne, kan derfor ligesaa vel være direkte resultater af syntheser som af spaltninger eller oxydationer.

I betragtning af, hvor fragmentarisk vort kjendskab til acetonets og diacetsyrens forhold i organismen i virkeligheden er, synes det mig idetheletaget endnu ikke muligt at opstille nogen i enkeltheder gaaende theori om disse stoffes fysiologi Dertil kræves et langt fyldigere materiale af kjendsgjerninger end det, som i dette øieblik foreligger.

Maalet for det arbeide, hvis resultater her skal refeferes, blev derfor at tilveiebringe nye experimentelle data vedrørende acetonets og diacetsyrens forhold i organismen og betingelserne for deres optræden i excreterne. Af hensyn til tid og omstændigheder indskrænkede jeg foreløbig mine undersøgelser til kun at gjælde acetonet, dog saaledes, at jeg saavidt muligt havde opmærksomheden henvendt ogsaa paa diacetsyren og β-oxysmørsyren.

I. Kan aceton omsættes i organismen?

Et af de spørgsmaal vedrørende acetonets forhold i organismen, der nødvendigvis kræver en besvarelse, er dette: *Er organismen under normale forhold istand til at sønderdele eller paa anden maade omsætte aceton,* som ad en eller anden vei bringes ind i kredsløbet, eller som er opstaaet under stofskiftet? Skulde det vise sig, at saa var tilfældet, ligger jo den slutning nær, at en acetonuri opstaar, naar denne evne svigter. Det blir imidlertid isaafald nødvendigt at antage ogsaa en anden funktion, der bevirker dannelse af aceton, og at en acetonuri nærmere betragtet skyldes en forrykkelse af det gjensidige forhold mellem disse to funktioner.

Jeg har forsøgt at besvare dette spørsmaal ved forsøg paa dyr af to forskjellige arter, nemlig kaniner og hunde, i den tanke, at hvis forsøgsresultaterne for begge arters vedkommende stemte overens, saa vilde der være stor sandsynlighed for, at de gjaldt alle høiere pattedyr, og at man ogsaa turde tillægge dem en vis gyldighed overfor mennesker.

Fremgangsmaaden ved mine forsøg var følgende:

Jeg fremstillede mig et rent aceton*), som jeg ved hjælp af en morfinsprøite bragte ind under dyrenes hud. Var det mig om at gjøre at bestemme den indsprøitede mængde saa nøiagtig som muligt, saa indesluttede jeg den fyldte sproite i et reagensrør, lukkede med en korkprop og veiede det hele før og efter indsprøitningen. Derved beskyttede jeg mig saavidt muligt mod fordampning.

I den første forsøgsrække (4 kaniner) bestemte jeg acetonet kun i urinen ved hjælp af den *Messinger-Huppert'ske* methode[44]. Dyrene sattes i et almindeligt kaninbur, under hvilket der til opsamling af urinen var anbragt en tragt med et filter af fin traaddug. Tragtens rør forlængedes ved slange og glasrør gjennem en dobbelt gjennemboret kautschukprop ned paa bunden af en kolbe. I proppens andet hul var anbragt en liden kviksølvventil, der kun tillod luften at strømme ud af kolben, naar urinen strømmede ind og fortrængte den. Ved denne indretning**) kunde jeg i kolben opsamle urinen i løbet af et døgn uden at behøve at frygte nævneværdig fordampning af aceton.

Dyrene fodredes med kaalblade. Urinen udskiltes da rigelig (400—500 ccm. i døgnet). Den indeholdt som normal bestanddel spor af flygtige substanser, der bandt jod i alkalisk opløsning og derfor ved den *Messinger-Huppert'ske*

*) Det aceton, som jeg benyttede, var fra *Merck* i Darmstadt. Det var fremstillet af bisulfitforbindelsen og blev, før jeg benyttede det, rectificeret ved destillation over chloralcium og glødet kulsurt kali. Det samme aceton benyttede jeg ved en række prøver paa noiagtigheden af den *Messinger-Huppert'ske* methode til bestemmelse af aceton i urinen. Se herom i „Zeitschr. für analyt. Chemie" Bd. 35 S. 503, hvor ogsaa kriterierne paa renheden af det i anvendelse bragte aceton findes angivne.

**) Den sees afbildet paa planchen (U og v); dog er her ledningsroret for urinen lufttæt forbindelse med burets tragtformige bund.

methode bestemtes som aceton. Da nu *v. Jaksch*[6]) har vist, at urinen hos kaniner ligesom hos mennesker indeholder spor af præformeret aceton, saa maa disse flygtige substanser idetmindste tildels bestaa af aceton, skjønt urindestillatet, naar det behandles efter den *Messinger'ske* methode med kalilud og jodjodkaliumopløsning, ikke giver *bundfald* af jodoform, saaledes som en acetonopløsning. Disse flygtige substansers mængde beregnet som aceton beløb sig ved fodring med kaalblade til 2 à 3 mgr. pr. døgn. I hungertilstand fandt jeg mindre, gjennemsnitlig 0,8 à 1 mgr. pr. døgn. Der indtræder idetheletaget ingen diaceturi eller acetonuri hos kaniner, der hungrer. De forholder sig i saa henseende forskjellig fra mennesker.

En voxen kanin taaler indtil et par gram aceton indsprøitet under huden uden at afficeres synderligt deraf. Ved større doser indtræder narkose. Ca. 6 gr. dræber dyrene. Efter en indsprøitning kan aceton altid paavises i urinen. Selv saa smaa doser som 10—20 mgr. (indsprøitet i vandig opløsning) frembringer svag acetonuri. Ved større doser stiger mængden af den aceton, der udskilles gjennem urinen; dog udgjør den altid kun en brøkdel (indtil 16 pCt.) af den indsprøitede mængde. Udskillelsen varer 1—2 døgn, alt efter mængden af den indsprøitede aceton. Der synes efter en indsprøitning at optræde ringe grad af albuminuri; derimod iagttoges ingen indflydelse paa kvælstofudskillelsen i urinen. Den *Gerhard'ske* jernchloridreaktion indtraadte ikke, urinen indeholdt ikke sukker og dreiede ikke polarisationsplanet.

Jeg anfører ingen detaljer vedrørende disse forsøg. De var kun foreløbige og af mindre betydning for løsningen af det stillede spørgsmaal. Det viste sig nemlig ved indsprøitning af større doser, at aandedrætsluften strax efter lugtede stærkt af aceton. Skulde jeg altsaa kvantitativt bestemme den udskilte aceton, saa maatte dette ske saavel i aandedrætsluften som i urinen, d. v. s. jeg maatte bygge et respirationsapparat.

For mit øiemed syntes mig den *Pettenkofer'ske* model den mest hensigtssvarende. Mit apparat havde følgende konstruktion:

Dyret indesluttedes i et bur (*B*), hvis vægge bestod af grovere, bunden af finere traadnet. Dette bur indesluttedes under forsøgene i en kasse (*C*) af jernblik, der bestod af et firkantet, nedad aabent laag og en tragtformig bund, omkring hvilken der løb en rende, som indeholdt kviksølv. I denne rende kunde laagets frie rand sænkes ned. I laagets opadvendende flade var indkittet et glasvindu. I hver af bundens ender var der indloddet et metalrør for til- og bortledning af luft. Tilløbsrøret mundede lige over bunden, afløbsrøret lige under glasvinduet i laagets tag. Begge endte i *T*-rør med lange arme, hvori fine huller.

Luften lededes til apparatet gjennem en ledning, der mundede i fri luft udenfor det rum, hvori apparatet var anbragt. I lednidgens forløb var anbragt en kviksølvventil (*A*), som kun tillod luften at passere i retning mod buret. Afløbsrøret fra buret førte til en liden dobbelt tubuleret flaske (*D*), bestemt til at optage fortættet vanddamp. Paa den anden side af denne deltes ledningen i to, en hovedledning, hvorigjennem den største mængde luft passerede, og en biledning, hvori apparaterne for luftanalyse var indskudte. Gjennem begge ledninger sugedes luften ved hjælp af vandluftpumper og maaltes ved gasmaalere. Den i hovedstrømmen anbragte maaler (*F*) angav engelske kubikfod, den i bistrømmen (*L*) liter. Strømmenes hastighed reguleredes ved hjælp af kviksølvventiler (*V* og *w*), anbragte mellem vandluftpumperne og maalerne. Forskjellen mellem lufttrykket og trykket i gasmaalerne (sugningen maalt i mm. kviksølvhøide) maaltes ved kviksølvmanometere (*M* og *m*) anbragte paa de rør, hvorigjennem luften strømmede fra maalerne. *T* og *t* er thermometere, der angav temperaturen af luften i maalerne.

Bistrømmen[1]) ledtodes først gjennem et modificeret *Pettenkofersk* absorptionsrør[2]) (*k*), hvori 40 pct. kalilud, derfra gjennem et forbrændingsrør (*c*) med glødende kobberoxyd, og endelig gjennem et andet absorptionsrør (*b*), hvori titreret barytvand. Derfra førte ledningen til gasmaalerne.

I kalirøret absorberedes *al* kulsyre og en del af den i luften indeholdte acetondamp. Resten forbrændte i kobberoxydrøret til kulsyre, som absorberedes i barytrøret, paa sædvanlig maade bestemtes titrimetrisk og omregnedes i aceton. Den i kalirøret tilbageholdte aceton bestemtes titrimetrisk efter *Messingers* methode[3]). Absorptionsrørene indeholdt 150 ccm. væske. Volumet kunde nøiagtig aflæses ved skalaer, anbragte paa rørene. Da barytrøret indeholdt titreret barytvand, hvis volum under forsøgsperioden kunde forandre sig ved fordampning eller fortætning af vanddamp, saa aflæstes volumet før og efter forsøgsperioden, og de til analyse udtagne mængder reduceredes ved en korrektionsregning til sit oprindelige volum. Der gjordes altid dobbeltanalyser. Til hver analyse udtoges 50 ccm. af kaliluden, undertiden 25 ccm., naar den var meget acetonrig.

Absorptionsrør og pipetter var omhyggelig kalibrerede ved udveining med vand, og for barytrørenes vedkommende var der anstillet sammenligning mellem skalaen paa røret og skalaen paa den burette, der benyttedes ved titreringen.

Da maalingen af bistrømmen skede, efterat luften var befriet for kulsyre, maatte jeg forat undgaa feil i beregningen af acetonet i hovedstrømmen enten bestemme kulsyren i bistrømmen og beregne den for hovedstrømmen eller ogsaa før maalingen befri luften i hovedstrømmen for kulsyre. Jeg valgte den sidste fremgangsmaade og indskjød i hovedstrømmen et absorptionsapparat for kulsyre, bestaaende af en stor dobbelt tubuleret flaske (*K*), indeholdende 2 liter 40 pct. kalilud, en cylinder med natronkalk (*N*) og en (paa

---

[1]) Paa planchen er for tydeligheds skyld apparaterne i bistrømmen anbragte *under* bordet istedetfor *paa* bordet ved siden af apparaterne i hovedstrømmen.

[2]) Beskrevet i „Zeitschr. für analyt. Chemie" Bd. 35 S. 516.

[3]) Berichte d. d. chem. Gesellsch. 21. 2. S. 3366. I „Zeitschr. für analyt. Chemie" Bd. 35 S. 503 har jeg offentliggjort en række prøver paa methodens paalidelighed. Af disse vil det sees, at den har fuldt krav paa paalidelighed.

planchen ikke angivet) liden vaskeflaske med barytvand, den sidste til kontrol paa luftens frihed for kulsyre.

Forat luftens maaling skulde ske ved saavidt muligt samme temperatur, var begge maalere anbragte i et lukket skab, og forat heden fra gasovnen ikke skulde virke forstyrrende, var denne anbragt i et aftræk i et hjørne af rummet.

Kaldes nu det paa maaleren F under en forsøgsperiode aflæste volum for f, det paa maaleren L aflæste for l, den i biledningen bestemte acetonmængde for a, saa skulde den i forsøgsperioden udskilte, samlede acetonmængde (A) være:

$$A = a\frac{fn}{l} + a = a\left(\frac{fn}{l} + 1\right)$$

i hvilken ligning n er forholdstallet mellem engelske kubikfod og liter (28,314). Jeg kunde imidlertid ikke under de forhaandenværende omstændigheder stole paa rigtigheden af maalernes angivelser. De arbeidede nemlig ikke under forhold, for hvilke de var kalibrerede. Absorptionsapparaterne bevirkede i begge ledninger en temmelig stor modstand mod luftstrømmen, og forat overvinde denne maatte der udøves en betydelig sugning, i hovedstrømmen 18—20 mm., i bistrømmen ca. 15 mm. kviksølvhøide.

Forat kunne reducere begge maaleres angivelser til en given enhed — liter — maatte jeg ved empirisk kalibrering bestemme to konstanter, α og β.

$$A = a\frac{f\alpha}{l\beta} + a = a\left(\frac{f}{l} \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 1\right)$$

Det viste sig, at især β varierede ikke saa lidet ved de forskjellige kalibreringsforsøg. Det saaledes empirisk bestemte forhold $\frac{\alpha}{\beta}$ varierede mellem 29,042 og 32,093.

Fremgangsmaaden ved konstantbestemmelsen var følgende:

α bestemtes ved

Forsøgsanordning I: Maaleren L appliceredes i ledningen istedetfor buret C. Tregangshanen H stilledes saaledes, at luften kun kunde passere gjennem hovedledningen. Luftstrømmens hastighed varierede i de forskjellige forsøg mellem 19 og 62 liter i timen. Kaldes de paa maaleren F aflæste volumina for f, de paa maaleren

Trykt den 19de November 1896.

L aflæste for l, saa er $f\alpha = l$, hvor α er en konstant, hvormed maaleren F's angivelser kan reduceres til samme enhed som maaleren L's (Liter). Denne enhed benyttede jeg som standardenhed. I 7 forsøg varierede α mellem 27,3 og 27,6. Luftstrømmens hastighed syntes ikke at være bestemmende for dens variationer.

β bestemtes ved

Forsøgsanordning II: Maaleren L paa sin sædvanlige plads, F paa buret C's plads. Luftstrømmens hastighed varierede i 13 forsøg mellem 1,9 og 11,8 liter i timen. Kaldes de paa maalerne L og F ved denne forsøgsanordning aflæste volumina for l_1 resp. f_1 saa er $l_1 \beta = f_1 \gamma$, i hvilken ligning β og γ er konstanter, ved hvilke maalerne L's og F's angivelser kan reduceres til standardenheden.

γ bestemtes ved

Forsøgsanordning III (2 forsøg): Et luftvolum af en given størrelse sugedes først med en hastighed af ca. 0,9 resp. 1,6 liter i timen gjennem maaleren F alene, derpaa med en hastighed af ca. 34 resp. 61 liter i timen gjennem maaleren L. Sugningen foretoges ved hjælp af en aspirator, og volumet bestemtes ved et paa aspiratorens vandstandsrør anbragt mærke. Kaldes de paa maalerne F og L aflæste volumina for φ resp. λ, saa er $\gamma = \frac{\lambda}{\varphi}$; γ fandtes $=$ 28,342 og 28,269, i gjennemsnit 28,306.

Konstanten β varierede ved de 13 efter forsøgsanordning *II* udførte forsøg mellem 0,86 og 0,94. Den syntes at tiltage, dog uregelmæssigt, med luftstrømmens hastighed.

Sættes $\alpha = 27{,}3$ og $\beta = 0{,}94$, saa blir $\frac{\alpha}{\beta} = 29{,}042$. Sættes $\alpha = 27{,}6$ og $\beta = 0{,}86$, saa blir $\frac{\alpha}{\beta} = 32{,}093$.

Ved beregningen af konstanterne toges intet hensyn til differencer i temperatur og tryk af luften i de to maalere. Det viste sig, at disse faktorer, naar de holdtes nogenlunde konstante, ikke udøvede paa langt nær saadan indflydelse paa variationerne af α og β som modstanden, især i biledningen og den deraf afhængige hastighed af luftstrømmen. For nu ved alle forsøg at holde ogsaa modstanden nogenlunde konstant, indskjød jeg i biledningen mellem gasmaaleren og barytrøret en hane, med hvilken jeg regulerede hastigheden. Denne forholdsregel ansaa jeg overflødig i hovedledningen, da variationerne af α viste sig at være temmelig ubetydelige.

For altid at være orienteret over de ydergrændser, indenfor hvilke det rigtige resultat af hvert forsøg maatte falde, beregnede jeg ved hjælp af begge de anførte værdier af $\frac{\alpha}{\beta}$ en maximal og en minimal værdi for resultatet. Som led i beregningen af den maximale resp. den minimale værdi benyttedes endvidere de største resp. de mindste af de ved de titrimetriske dobbeltanalyser fundne værdier.

I tabellerne over mine forsøg har jeg ved alle detaljangivelser anført maximalværdierne, minimalværdierne blot for hovedresultatets vedkommende.

Af ovenstaaende ligning for A fremgaar, at differensen mellem den maximale og minimale værdi af resultafet voxer med forholdet $\frac{f}{l}$. Forat gjøre dette saa lidet som muligt regulerede jeg luftstrømmen i hovedledningen saa langsom og i biledningen saa hurtig som det under de forhaandenværende omstændigheder gik an. I almindelighed lod jeg gjennem hovedledningen passere 50, gjennem biledningen 3—5 liter i timen. Talværdien af faktoren $\left(\frac{f}{l} \cdot \frac{\alpha}{\beta} + 1\right)$ varierede da i de forskjellige forsøg mellem ca. 6 og 12.

For sikkerheds skyld kontrollerede jeg mit apparat ved at bestemme afveiede mængder aceton, som jeg sprøitede ind gjennem en kautschukforbindelse i den til buret førende luftledning. To af disse kontrolforsøg er udførte ved begyndelsen, to ved slutningen af den række experimenter, jeg anstillede med mit apparat.

Forsøg.	Varighed.	Ind-sprøitet aceton. Mgr.	Gjen-funden aceton. Mgr.	Gjenfunden aceton i pct. af den ind-sprøitede.	
I	10 t. 36 min.	917,1	947,8 1035,2	103,3 112,9	Høieste beregn. Laveste —
II	9 t. 45 min.	590,0	602,9 660,8	102,2 112,0	Høieste — Laveste —
III	7 t. 0 min.	956,5	(837,5)[1] 991,0	(87,6)[1] 103,6	Høieste — Laveste —
IV	9 t. 0 min.	950,2	918,9 1002,1	96,7 105,5	Høieste — Laveste —

[1]) Det lave resultat sandsynligvis følge af en analysefeil.

Urinen opsamledes under forsøgene i en kolbe (u), som var anbragt under burets tragtformige bund, med hvilken den stod i lufttæt forbindelse med slange og glasrør. Kolben var forsynet med en kviksølvventil (v), der hindrede luften fra at suges gjennem kolben op i buret.

Bestemmelsen af acetonet i urinen udførtes efter den *Messinger-Huppert'ske* methode. Denne giver gjennemsnitlig ca. 8 pct. for lave resultater[1]). Da imidlertid den mængde aceton, som udskilles i urinen, er ringe i forhold til den, som udskilles i aandedrætsluften, og da den sidste ved beregning af dens maximale værdi bestemmes for høit, saa har jeg ladet denne feil ud af betragtning ved beregningen af totalmængden af den udskilte aceton. Et blik paa nedenstaaende tabeller viser, at den i hovedsagen ikke forandrer resultaterne af mine forsøg.

Excrementerne undersøgtes paa aceton i et forsøg, der forøvrigt mislykkedes paa grund af analysefeil. Der var indsprøitet under huden paa en kanin 925 mgr. aceton. I excrementerne, der destilledes efter tilsætning af vand og syre paa samme maade som urinen, fandtes 1,66 mgr. aceton. I et andet forsøg med en hundehvalp, paa hvilken der var indsprøitet 964,9 mgr. aceton, fandtes i det første døgn 1,23 mgr. aceton i excrementerne. Da disse smaa mængder ikke har nogensomhelst indflydelse paa forsøgsresultatet, og da det tilmed ved et par forsøg viste sig, at aceton, der indsprøites i ventrikelen, resorberedes meget godt og udskiltes paa sædvanlig maade gjennem nyrer og lunger, saa ansaa jeg det ved de øvrige forsøg for overflødigt at gjøre acetonbestemmelser i excrementerne.

Forsøgene varede i 2 til 4 døgn og den enkelte forsøgsperiode i 12 til 15 timer, d. v. s. kali- og barytrøret samt kolben for urinen skiftedes hver morgen og aften. De nye rør anbragtes paa den for den bestemte plads, og ved omdreining af to tregangshaner, som var anbragte i et i biledningen indskudt system af glasror, kunde jeg i løbet af

[1]) Se min afhandling: Ueber die *Messinger'ske* Methode zur Bestimmung des Acetons. Zeitschr. für analyt. Chemie Bd. 35 S. 503.

et par sekunder lede luftstrømmen fra de brugte til de nye rør samt aflæse gasmaalernes stand.

Naar forsøgene udførtes paa hungrende dyr, forblev buret den hele tid lukket. Skulde dyrene fodres, maatte det aabnes. Herunder standsedes sugningen med vandluftpumperne, og hanen *H* dreiedes til. Den hele operation skede hurtigst muligt og kan ikke have medført nævneværdigt tab af aceton.

Forat bestemme en normalværdi for aandedrætsluftens gehalt paa stoffe, der ved analyserne virkede som aceton, udførtes følgende forsøg paa en hungrende kanin.

Forsøg 1.

Dyrets vægt var før forsøget 1910, efter 1730 gr.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Funden aceton i kalirøret.	
5/9 95	10 t. 36 min.[1])	3,1 mgr.	
	13 t. 40 min.	2,6 „	
6/9 95	9 t. 56 min.	3,2 „	
	14 t. 28 min.	3,2 „	
7/9 95	8 t. 27 min.	2,9 „	
Funden aceton i barytrøret[2]) .		73,4 „	
I den tubulerede flaske *D* . .		0,4 „	
	Sum	88,8 „	= 17,8 mgr. pr. forsøgsperiode.
Efter laveste beregning . . .		58,0 „	= 11,6 mgr. pr. forsøgsperiode.

[1]) Den første af de for hver dato anførte forsøgsperioder strækker sig ved dette som ved de følgende forsøg fra om morgenen til om aftenen, den anden fra om aftenen til næste dags morgen.
[2]) I barytrøret afsattes saa lidet kulsur baryt, at jeg lod det fra først af indsatte rør forblive paa sin plads under hele forsøget.

Ogsaa følgende to forsøg anfører jeg her. De blev udførte forat undersøge, hvorvidt sukkerstik frembringer acetonudskillelse hos kaniner, hvilket viste sig ikke at være tilfælde.

Ved det første af disse kom der ikke sukker i urinen. Dyrets vægt var 1950 gr. Det fodredes under forsøget med kaal og gulerødder. Sukkerstikket udførtes 4/12 95 kl. 10½ fm.

Forsøg II.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Aceton udskilt aandedrætsluften.		Aceton udskilt i urinen.		Urinmængde
		Høieste beregning.	Laveste beregning.	Høieste fund[1].	Laveste fund[1].	
4/12 95	8 t 16 min.	33,5 mgr.	23,6 mgr.	3,1 mgr.	2,4 mgr.	121 gr.
	15 t. 5 min.	17,8 „	15,8 „			
5/12 95	9 t. 4 min.	19,0 „	5,3 „	3,0 „	2,0 „	102 „
	14 t. 31 min.	23,3 „	5,6 „			
Middeltal pr. forsøgsperiode		23,4 mgr.	12,6 mgr.			

[1]) ved de to parallelanalyser.

Ved følgende forsøg kom der glykosuri. Dyret fik efter sukkerstikket stærke og vedholdende rullebevægelser, hvad der foraarsagede endel ulemper ved forsøget. Det vilde ikke tage næring til sig og døde kort efter forsøgets ophør. Vægt før forsøget 2100 gr., efter 1620 gr. Sukkerstikket udførtes 10/12 kl. 10,20 min. fm.

Forsøg III.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Aceton udskilt i aandedrætsluften.		Aceton udskilt i urinen.		Sukker i urinen. Gr.	Urinmængde Gr.
		Høieste beregning. Mgr.	Laveste beregning. Mgr.	Høieste fund. Mgr.	Laveste fund. Mgr.		
10/12 95	9 t. 59 min.	29,4	26,9	1,92	1,85	3,0	175
	13 t. 57 min.	28,2	16,2				
11/12 95	8 t. 44 min.	23,1	12,6	3,37	0,80	0,3	81
	15 t. 19 min.	17,6	12,2				
12/12 95	8 t. 58 min.	(12,3)	(9,3)[1])	2,01	0,98	Spor.	57
	14 t. 41 min.	(6,6)	(3,7)				
Middeltal pr. forsøgsperiode		24,6	17,0				

[1]) De indklamrede tal er ikke medtagne i beregningen af middeltallet, dels fordi dyret ved forsøgets slutning var stærkt medtaget, dels fordi tallene paa grund af feil ved forsøget, foraarsagede ved dyrets rullebevægelser, ikke er ganske paalidelige.

Ved disse tre forsøg udskiltes der altsaa gjennem aandedrætsluften smaa mænger af flygtige stoffe, der i mit respirationsapparat bestemtes som aceton. Deres mængde udgjorde gjennemsnitlig efter høieste beregning 21,9, efter laveste 14,1 mgr. pr. forsøgsperiode. Det viste sig imidlertid ved flere af mine forsøg med indsprøitning af aceton, at den i aandedrætsluften bestemte aceton ved forsøgenes slutning sank langt under de ved ovenanførte experimenter fundne mængder, hvad der sandsynligvis beror paa individuelle forskjelligheder hos dyrene. Derfor har jeg ikke fundet mig foranlediget til ved beregningen af mine øvrige forsøg at indføre nogen correktion for disse flygtige bestanddele af aandedrættet.

Følgende 4 forsøg er udførte med hungrende kaniner, paa hvilke der indsprøitedes afveiede mængder aceton.

Forsøg IV.

Hankanin. Vægt ved begyndelsen af forsøget 2220 gr.
Indsprøitet 490,1 mgr. aceton.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Aceton funden i aandedrætsluften.	
24/10 95	9 t. 11 min.	66,5 mgr.	
	14 t. 24 min.	56,5 "	
25/10 95	9 t. 28 min.	6,6 "	
I den tubulerede flaske *D*		0,2 "	
Gjenfunden i aandedrætsluften		129,8 mgr.	= 26,5 pct. af den indsprøitede mængde.
Gjenfunden i urinen[1]) . .		2,8 "	= 0,6 pct af den indsprøitede mængde.
Idethele gjenfunden . . .		132,6 mgr.	= 27,1 pct. af den indsprøitede mængde.
Dyret har omsat		357,5 "	= 72,9 pct. af den indsprøitede mængde.

I urinen udskiltes 2,2 pct. af den hele udskilte mængde.

(Efter laveste beregning gjenfandtes 107,9 mgr. = 22,0 pct. af den indsprøitede mængde).

[1]) Under forsøget lod dyret ingen urin. Det fik $^{26}/_{10}$ kaal og lod strax derpaa urin, som undersøgtes.

Forsøg V.

Hankanin, der hungrede siden 17/9 om eftermiddagen. Dyret veiede 19/9 om aftenen 1790 gr. Indsprøitet 922,6 mgr. aceton.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Gjenfunden aceton i kalirøret.	Gjenfunden aceton i urinen.
20/9 95	8 t. 9 min.	99,3 mgr.	14,7 mgr.
	14 t. 4 min.	99,3 "	
21/9 95	10 t. 8 min.	34,6 "	13,2 "
	14 t. 6 min.	7,8 "	
22/9 95	9 t. 0 min.	1,3 "	0,6 "
I den tubulerede flaske *D*		0,2 "	
I barytrøret[1])		366,4 "	
Gjenfunden i aandedrætsluften		608,9 mgr.	= 66,0 pct. af den indsprøitede mængde.
Gjenfunden i urinen . .		28,5 "	= 3,1 pct. af den indsprøitede mængde.
Idethele gjenfunden . . .		637,4 mgr.	= 69,1 pct. af den indsprøitede mængde.
Dyret har omsat		285,2 "	= 30,9 pct af den indsprøitede mængde.

I urinen udskiltes 4,5 pct af den hele udskilte mængde.

(Efter laveste beregning gjenfunden 577,1 mgr. = 62,6 pct. af den indsprøitede mængde).

[1]) Barytrøret skiftedes ikke under forsøget.

Forsøg VI.

Hankanin, der hungrede siden 3/11 om formiddagen. Vægt ved forsøgets begyndelse 2180 gr. Indsprøitet 980,5 mgr. aceton.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Gjenfunden aceton i aandedrætsluften.	Gjenfunden aceton i urinen	Urinmængde Gr.
5/11 95	12 t. 27 min.	254,1 mgr.		
	10 t. 50 min.	145,3 "		
6/11 95	9 t. 4 min.	24,8 "		
	14 t. 42 min.	4,4 "	0,5 mgr.	550[1])
I den tubulerede flaske *D*		0,3 "		
Gjenfunden i aandedrætsluften		428,9 mgr.	= 43,7 pct. af den indsprøitede mængde.	
Gjenfunden i urinen . .		0,5 "	= 0,1 pct. af den indsprøitede mængde.	
Idethele udskilt		429,4 mgr.	= 43,8 pct. af den indsprøitede mængde.	
Dyret har omsat		551,1 "	= 56,2 pct. af den indsprøitede mængde.	

I urinen udskiltes 0,23 pct. af den hele udskilte mængde.

(Efter laveste beregning udskilt 385,9 mgr. = 39,4 pct. af den indsprøitede mængde).

[1]) Urinen lodes 8/11 om morgenen efterat dyret aftenen iforveien havde faaet kaal.

Forsøg VII.

Hankanin, der hungrede siden 7/10 om morgenen. Vægt ved forsøgets begyndelse 2587 gr., efter forsøget 2290 gr. Der indsprøitedes 2061,1 mgr. aceton.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Gjenfunden aceton i aandedrætsluften.	Gjenfunden aceton i urinen.	Urinmængde
9/10 95	8 t. 29 min	380,6 mgr.	94,4 mgr.	206 gr.
	15 t. 42 min.	517,8 „		
10/10 95	9 t. 18 min.	121,4 „	20,4 „	163 „
	14 t. 35 min.	12,8 „		
11/10 95	9 t 2 min.	3,5 „		
I den tubulerede flaske *D*		0,3 „		
Gjenfunden i aandedrætsluften		1036,4 mgr.	= 50,3 pct. af den indsprøitede mængde.	
Gjenfunden i urinen . . .		114,8 „	= 5,6 pct. af den indsprøitede mængde.	
Idethele gjenfunden . . .		1151,2 mgr.	= 55,9 pct. af den indsprøitede mængde.	
Dyret har omsat		909,9 „	= 44,1 pct. af den indsprøitede mængde.	

I urinen udskiltes 10 pct. af den hele udskilte mængde.
(Efter laveste beregning udskiltes 1038,8 mgr. = 50,4 pct. af den indsprøitede mængde).

Ved følgende forsøg, der ligesom de ovenanførte var et hungerforsøg, bragtes acetonet ind i ventrikelen, idet sprøitespidsen førtes ind tværs gjennem bugvæggen. Dyret døde 2 dage efter forsøgets ophør, og jeg overbeviste mig om, at sprøitespidsen havde naaet sit bestemmelsessted, idet jeg paa ventrikelens serosa fandt mærke efter indstikaabningen.

Forsøg VIII.

Hankanin, der hungrede siden 24/11 om formiddagen. Vægt ved begyndelsen af forsøget 1750 gr. Der indsprøitedes 2152,8 mgr. aceton.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Gjenfunden aceton i aandedrætsluften	Gjenfunden aceton i urinen.	Urinmængde
27/11 95	8 t. 38 min.	404,0 mgr.		
	15 t. 11 min.	611,1 „	5,0 mgr.	12 gr.
28/11 95	8 t. 56 min.	223,0 „		
	14 t. 24 min.	234,8 „		
29/11 95	8 t. 43 min.	75,7 „	10,9 „	95 „
	15 t. 36 min.	40,1 „		
30/11 95	8 t. 55 min.	24,3 „	2,5 „	42 „
I den tubulerede flaske *D*		0,2 „		
Gjenfunden i aandedrætsluften		1613,2 mgr.	= 74,9 pct. af den indsprøitede mængde.	
Gjenfunden i urinen . .		18,4 „	= 0,9 pct. af den indsprøitede mængde.	
Idethele gjenfunden . . .		1631,6 mgr.	= 75,8 pct. af den indsprøitede mængde.	
Dyret har omsat		521,2 „	= 24,1 pct. af den indsprøitede mængde.	

Urinen indeholdt 1,2 pct. af den hele udskilte mængde. (Efter laveste beregning udskiltes 1448,4 mgr. = 67,3 pct. af den indsprøitede mængde).

Dette forsøg adskiller sig med hensyn paa dets resultat i intet væsentligt fra de foregaaende. Det har særlig interesse derved, at det viser, at acetonets passage gjennem tarmvæggen ikke øver nogen indflydelse paa dets omsætning.

Ved følgende to forsøg fodredes dyrene daglig med 500 gr. kaalblade. Acetonet appliceredes subcutant. Fodringen medførte den ulempe, at der gjennem lungerne udskiltes en stor mængde vanddamp, der for en stor del fortættede sig i buret. I det først refererede forsøg opsamledes det i buret fortættede vand, og dets gehalt paa aceton bestemtes. Der fandtes 4,02 mgr., et resultat, som ganske vist er for høit, da det ved titreringen med jod viste sig, at destillatet af væsken ogsaa indeholdt ammoniak, der binder jod i alkalisk opløsning og altsaa ved titreringen bestemtes som aceton. Den fundne mængde er under alle omstændigheder saa liden, at jeg uden nævneværdig feil i forsøgsresultatet kunde lade den ud af betragtning.

Forsøg IX.

Hankanin. Vægt ved begyndelsen af forsøget 2100 gr., ved slutningen 2110 gr. Der indsprøitedes 981 mgr. aceton.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Gjenfunden aceton i aandedrætsluften.	Gjenfunden aceton i urinen.	Urinmængde
14/11 95	8 t. 40 min.	191,6 mgr.	108,3 mgr.	385 gr.
	15 t. 52 min.	253,7 "		
15/11 95	8 t. 20 min.	31,2 "	7,5 "	510 "
	15 t. 45 min.	34,6 "		
I den tubulerede flaske *D*		0,3 "		
Gjenfunden i aandedrætsluften		511,4 mgr.	= 52,1 pct. af den indsprøitede mængde.	
Gjenfunden i urinen . .		115,8 "	= 11,8 pct. af den indsprøitede mængde	
Idethele gjenfunden . . .		627,2 mgr.	= 63,9 pct. af den indsprøitede mængde.	
Dyret har omsat		353,8 "	= 36,1 pct. af den indsprøitede mængde.	

Urinen indeholdt 20,1 pct. af den hele udskilte mængde.

(Efter laveste beregning udskiltes 575,7 mgr. = 58,7 pct. af den indsprøitede mængde).

Forsøg X.

Hankanin. Vægt ved forsøgets begyndelse 2400 gr. Der indsprøitedes 2316,1 mgr. aceton.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Gjenfunden aceton i aandedrætsluften.	Gjenfunden aceton i urinen.	Urinmængde
30/10 95	9 t. 28 min.	375,7 mgr.	221,5 mgr.	430 gr.
	14 t. 29 min.	738,4 "		
31/10 95	8 t. 33 min.	91,6 "	22,8 "	350 "
	15 t. 15 min.	41,2 "		
1/11 95	8 t. 0 min.	8,6 "	7,1 "	225[1] "
I den tubulerede flaske *D*		0,2 "		
Gjenfunden i aandedrætsluften		1255,7 mgr.	= 54,2 pct. af den indsprøitede mængde.	
Gjenfunden i urinen . .		251,4 "	= 10,9 pct. af den indsprøitede mængde.	
Idethele gjenfunden . . .		1507,1 mgr.	= 65,1 pct. af den indsprøitede mængde.	
Dyret har omsat		809,0 "	= 34,9 pct. af den indsprøitede mængde.	

Urinen indeholdt 16,7 pct. af den hele udskilte mængde.

(Efter laveste beregning gjenfunden 1357,7 mgr. = 58,6 pct. af den indsprøitede mængde).

[1]) Urinen opsamlet indtil 2/11 om morgenen.

Mine to sidste forsøg udførtes med hundehvalpe, der under forsøgene fodredes med melk. Et foreløbigt forsøg med den ene af dem, ved hvilket der indsprøitedes ca. 1 gr. aceton, viste, at den paafølgende acetonuri ophørte i løbet af et døgn.

Dato.	Aceton i urinen.	Urinmængde.
16/12 95	35,9 mgr.	200 gr.
17/12 95	1,4 „	197 „
18/12 95	2,0 „	212 „

Forsøg XI.

Hundehvalp. Vægt efter et rigeligt maaltid 1420 gr. Der indsprøitedes 976,2 mgr. aceton.

Dato.	Forsogsperiodens varighed.	Gjenfunden aceton i aandedrætsluften.	Gjenfunden aceton i urinen.	Urinmængde
19/12 95	6 t. 25 min.	293,6 mgr.	106,4 mgr.[1]	204 gr.
	15 t. 15 min.	313,3 „		
20/12 95	9 t. 19 min.	43,7 „	9,3 „ [2]	277 „
	14 t. 31 min.	15,1 „		

Udskilt gjennem aandedrættet	665,7 mgr.	= 68,8 pct. af den indsprøitede mængde.
Udskilt gjennem urinen .	115,7 „	= 12,0 pct. af den indsprøitede mængde.
Idethele gjenfundet . . .	781,4 „	= 80,8 pct. af den indsprøitede mængde.
Dyret har omsat	194,8 „	= 19,2 pct. af den indsprøitede mængde.

I urinen udskiltes 14,9 pct. af den hele udskilte mængde.

(Efter laveste beregning udskiltes 689,1 mgr. = 71,2 pct. af den indsprøitede mængde).

[1]) Fodredes blot om morgenen.
[2]) Fodredes morgen og aften.

Forsøg XII.

Hundehvalp. Vægt ved begyndelsen af forsøget 1750 gr., efter forsøget 1700 gr. Der indsprøitedes 964,9 mgr. aceton.

Dato.	Forsøgsperiodens varighed.	Gjenfunden aceton i aandedrætsluften.	Gjenfunden aceton i urinen.	Urin-mængde
$^2/_1$ 96	6 t. 58 min.	245,4 mgr.	70,2 mgr.[1])	170 gr.
	16 t. 1 min.	241,1 „		
$^3/_1$ 96	8 t. 38 min.	22,3 „	?[2])	?
	14 t. 41 min.	15,5 „		
$^4/_1$ 96	9 t. 13 min.	9,3 „	4,1 mgr.	151 gr.
	15 t. 21 min.	9,4 „		
I den tubulerede flaske *D*		0,3 „		
I vand, fortættet i buret .		3,9 „		

Udskilt gjennem aandedrættet	547,2 mgr.	= 56,7 pct. af den indsprøitede mængde
Udskilt gjennem urin og excrementer	75,4 „	= 7,8 pct. af den indsprøitede mængde.
Idethele gjenfunden . . .	622,6 „	= 64,5 pct. af den indsprøitede mængde.
Dyret har omsat	342,3 „	= 35,5 pct. af den indsprøitede mængde.

I urinen fandtes 12,1 pct. af den hele gjenfundne mængde. (Efter laveste beregning gjenfandtes 545,1 mgr. = 56,5 pct. af den indsprøitede mængde).

[1]) Excrementerne indeholdt 1,23 mgr. aceton.
[2]) Urinen gik tabt. Regner man, at den som i forrige forsøg i 2det døgn indeholdt ca. 10 mgr. aceton, saa udgjør dette lidt over 1 pct. af den indsprøitede mængde.

Sluttelig hidsættes en oversigtstabel over de hovedsagelige resultater af samtlige forsøg.

Forsøg.	Dyreart.	Daglig føde.	Indsprøitet aceton.		Omsat aceton i pct. af den indsprøitede mængde.		Pct. af den udskilte mængde i urinen.	Urinmængde
				Mgr.	Mgr.	Pct.	Pct.	Gr.
IV	Kanin	Hunger	Subcut.	490,1	357,5	72,9	2,2	?
V	—	—	—	922,6	285,2	30,9	4,5	?
VI	—	—	—	980,5	551,1	56,2	0,2	550 [1])
VII	—	—	—	2061,1	909,9	44,1	10,0	369
VIII	—	—	I ventrikelen	2152,8	521,2	24,1	1,2	107
IX	—	500 gr. kaal	Subcut.	981,0	353,8	36,1	20,1	895
X	—	—	—	2316,1	809,0	34,9	16,7	780
XI	Hundehvalp	Melk	—	976,2	194,8	19,2	14,9	481
XII	—	—	—	964,9	342,3	35,3	12,1	?

[1]) Efter forsøget.

De resultater, som kan uddrages af disse forsøg, er i korthed følgende:

Naar der hos en kanin eller hund gjennem fordøielseskanalen eller ved subcutan indsprøitning indbringes aceton i organismen, saa udskilles i løbet af de følgende par dage aceton i urinen og exspirationsluften. I disse excreter gjenfindes imidlertid blot en del af den indbragte aceton. Resten maa paa en eller anden maade være omsat i legemet.

Den mængde aceton, som omsættes, stiger i det store og hele taget med den i legemet indbragte mængde.

Dyrenes evne til at omsætte aceton paavirkes ikke mærkeligt af, om de faar føde eller hungrer. Der omsættes i begge tilfælde lige meget aceton*).

Af den aceton, som udskilles, gaar størstedelen ud gjennem lungerne. Den del, som udskilles i urinen, voxer med urinmængden. Derfor udskilles relativt mere aceton i urinen hos dyr, der faar føde, end hos dyr, der hungrer.

Selv meget smaa doser (10—12 mgr.) af aceton bevirker acetonuri.

Det vigtigste af disse resultater er det, at kaniner og hunde — til en vis grad i ethvert fald — virkelig besidder evnen til at omsætte aceton. Hvorvidt det er denne evne, som betinger, at der under normale livsforhold ikke optræder større mængder aceton i excreterne hos disse dyr, lader sig ikke direkte udlede af de foreliggende forsøg. Hvis det virkelig forholder sig saa, saa maa der antages en med denne funktion parallelt løbende og paa en vis maade antagonistisk funktion, der bevirker dannelse af aceton.

---

*) En af *Rosenfelds*[30]) forsøgsindivider udskilte efter en dose paa 5 gr. aceton ved kulhydratfri kost $59{,}_9$ mgr., ved kulhydratholdig kost 30 mgr. aceton. *Rosenfeld* mener deraf at kunne slutte, at kulhydraterne ogsaa bevirker destruktion af aceton, som gjennem tarmkanalen optages i legemet. Af nærliggende grunde synes mig hans forsøg ikke at tillade denne slutning.

Et saadant forhold finder sted under omsætningen af et andet stof i organismen, nemlig sukkeret. Vi ved, at der stadig dannes og atter destrueres sukker, og at blodet indeholder en vis mængde (1 til 1,5 pm.), som af nyrerne tilbageholdes og ikke gaar over i urinen. Det ligger da nær at spørge om, hvorvidt acetonet forholder sig paa lignende maade, om det repræsenterer et stofvexelprodukt af samme rang og betydning for organismen som sukkeret

Til besvarelse af dette spørgsmaal kræves, ligesom for sukkerets vedkommende, kjendskab til en række omstændigheder vedrørende acetonets forhold i organismen, først og fremst til blodets gehalt paa aceton i forskjellige kargebeter, ved forskjellig ernæring, i pathologiske tilstande, der medfører acetonuri o. s. v. Herom foreligger der hidindtil kun yderst sparsomme oplysninger. *v. Jaksch*[6]) har destilleret blod og forskjellige menneskelige organer med vand og i destillatet paavist spor af aceton. *Devoto*[45]) har undersøgt blodets gehalt paa aceton ved acetonuri og fundet den meget liden (0,02—0,09 pm.), selv naar urinen indeholdt rigelig aceton. Stilles disse angivelser ved siden af den omstændighed, at selv smaa mængder aceton (10—20 mgr.) fremkalder acetonuri, naar de bringes ind i de cirkulerende vædsker hos dyr, og *Rosenfelds*[30]) erfaring, at mennesker ikke engang formaar at omsætte fuldstændig 5 gr. aceton, naar de bringes ind i tarmkanalen, saa synes deraf at fremgaa, at acetonets forhold i organismen er et ganske andet end sukkerets. Sukkermængden i blodet er langt større end acetonmængden og kan til en vis grad forøges (indtil ca. 3 pm.), uden at der kommer glycosuri. *Claude Bernard*[46]) angiver, at han paa kaniner har indsprøitet subcutant 2 gr. druesukker uden at faa glycosuri.

Nyrerne synes altsaa ikke at besidde nogen evne til at tilbageholde aceton i blodet. Allerede denne omstændighed tyder paa, at acetonet som stofvexelprodukt ikke har den betydning for organismen som sukkeret, og at den evne til at omsætte aceton, som organismen utvivlsomt besidder, ikke under nogen omstændigheder formaar at hindre en acetonuri, naar betingelserne for dens optræden forøvrigt er tilstede, med andre ord, *at en acetonuri ikke skyldes en mangelfuld destruktion af aceton, som dannes i organismen, men en stofvexelforandring af anden art, der medfører rigeligere dannelse af aceton end under normale forhold.*

Denne slutning bestyrkes ogsaa af et andet af de ovenfor anførte forsøgsresultater, det nemlig, at den mængde, der omsættes, er uafhængig af, hvorvidt dyrene hungrer eller ikke. Som vi har seet, fremgaar det af flere nyere undersøgelser, at en omsætning af kulhydrater i organismen virker til at hindre eller undertrykke en acetonuri. Aceton, der i fri tilstand cirkulerer i organismen, synes imidlertid efter mine forsøg ikke at paavirkes af en kulhydratomsætning.

Den stofvexelforandring, der sluttelig fører til acetonuri, maa derfor foregaa paa et tidligere stadium i stofskiftet, førend det endnu er kommet til nogen dannelse af aceton.

Forholder nu sagen sig saaledes, kunde det synes at være en interessant opgave at undersøge ogsaa diacetsyrens og β-oxysmørsyrens forhold i organismen paa samme maade, paa hvilken jeg har undersøgt acetonets.

Disse stoffe ansees nemlig, og som det synes mig ikke uden grund, som forstadier i acetondannelsen.

Forsøg af denne art er anstillede af *Albertoni*[47]) over diacetsyren. Han applicerede den i tarmkanalen hos kaniner og hunde. Hos de første fandt han den constant igjen i urinen og ligeledes hos de sidste, naar de samtidig med diacetsyren fik kulsurt natron, saaledes at deres urin blev alkalisk. Fik de diacetsyre alene, fandt han blot aceton i urinen. Respirationsluften undersøgtes ikke.

En gjentagelse af disse forsøg med bestemmelse baade af aceton og diacetsyre i excreterne vilde støde paa mange vanskeligheder. Diacetsyren spaltes saa let i kulsyre og aceton, at en nøiagtig dosering af den sandsynligvis vilde vise sig umulig. Og selv om det lykkedes at bringe nøiagtig bestemte kvanta diacetsyre ind i legemet, saa vilde sandsynligvis ogsaa der foregaa en afspaltning af aceton, saaledes at forsøgene i de fleste henseender kun vilde blive en gjentagelse af de ovenanførte.

For β-oxysmørsyrens vedkommende stiller sagen sig maaske gunstigere, forsaavidt som den er en langt mere holdbar substans. Ogsaa med denne har *Albertoni*[47]) anstillet nogle forsøg. Dens application per os førte ikke til acetonuri eller diaceturi. Om den gjenfandtes uforandret i urinen, berettes ikke.

Ogsaa *Araki*[48]) har anstillet saadanne forsøg med β-oxysmørsyren. Han gjenfandt den delvis i urinen og paaviste ved siden deraf aceton, særlig naar organismens oxydationsevne var nedsat ved forgiftning med kuloxyd.

Baade *Albertoni* og *Araki* har imidlertid benyttet den kunstig fremstillede, optisk inaktive syre, hvilket forringer værdien af deres forsøg.

En gjentagelse af disse forsøg med anvendelse af den optisk aktive β-oxysmørsyre, hvorved baade den i excreterne udskilte uforandrede syre og dens mulige spaltningsprodukter nøiagtig bestemtes, synes mig at love værdifulde resultater.

Trykt den 23de November 1896.

II. Den alimentære acetonuri.

Vi har seet, at i nyere arbeider*) over acetonuriens afhængighed af ernæringen tillægges alle de tre vigtigste næringsstoffe, baade kulhydrater, fedt og æggehvide, en vis indflydelse enten i retning af at hindre eller at fremkalde en acetonuri. Man er enig om, at der ikke optræder acetonuri, naar der omsættes en vis mængde kulhydrater i legemet. Om aarsagen til acetondannelsen og om den maade, hvorpaa den foregaar, hersker der dog fremdeles delte meninger. Almindeligvis ansees acetonet som et derivat af æggehvidespaltning, om end den *Honigmann-v. Noorden'ske* theori har vist sig uholdbar *(Weintraud*[38]*), Hirschfeld*[28]*), Rosenfeld*[30]*))*. Idetheletaget synes mig det foreliggende forsøgsmateriale fremdeles utilstrækkeligt til derpaa at bygge en fast begrundet lære om den *alimentære acetonuri.*

Som bidrag til denne opgaves løsning meddeler jeg nedenstaaende forsøg. Jeg har i disse efter evne søgt at efterkomme fordringen til alsidighed. Paa den ene side har jeg i størst mulig udstrækning varieret forsøgsindividernes kost med hensyn paa mængde og sammensætning. Paa den anden side har jeg saa nøiagtig, som de forhaandenværende omstændigheder tillod det, søgt at bestemme omsætningen af de forskjellige stoffe i organismen.

---

*) Jeg sigter her nærmest til *Hirschfeld's* og *Rosenfeld's* arbeider. Disse var offentliggjorte kort tid, før jeg begyndte mine undersøgelser over den alimentære acetonuri. Jeg gjorde imidlertid først bekjendtskab med dem, da mine egne arbeider var afsluttede og skulde offentliggjøres.

Planen for mine undersøgelser var væsentlig at underkaste de ældre theorier, *Honigmann's* og *v. Noorden's*, en experimentel prøve og at undersøge, hvorvidt kulhydraterne besad en specifik evne til at hindre acetonuri. Herom indeholder nemlig den ældre literatur hyppig antydninger. Uafhængig af *Hirschfeld* og *Rosenfeld* kom jeg, som det vil sees, i mangt og meget til at gjøre de samme erfaringer som dem, om end mine forsøg paa flere punkter har ført til andre resultater.

Den største vanskelighed, der stiller sig iveien for udførelsen af saadanne forsøg, ligger deri, at der til dem kun kan benyttes mennesker. Hos de sædvanlige forsøgsdyr, kaniner og hunde, forholder nemlig acetonudskillelsen i hunger og ved forskjellig ernæring sig anderledes end hos mennesker. Der indtræder naar disse dyr hungrer ingen stigning, men tvertimod en synkning af acetonmængden i urinen. Ved ernæring af hunde med kjød og fedt har jeg (ligesom *Baginski*[21]) vistnok kunnet paavise en rigeligere udskillelse end i hunger, men om en acetonuri i den maalestok, hvori den kan forekomme hos mennesker, var der ikke tale. Den høieste dagsmængde, jeg iagttog, var 13 mgr. Disse dyr egner sig derfor ikke til saadanne forsøg.

For de fleste mennesker blir imidlertid en ensidig kost efter faa dages forløb modbydelig og fortæres kun med overvindelse. Sædvanlig har den til følge et stærkt vægttab og en slaphedsfornemmelse, der ved enkelte af mine forsøg steg til en saadan grad, at jeg saa mig nødsaget til at afbryde dem, før jeg ellers vilde have gjort det.

Mine forsøgsindivider var paa en undtagelse nær medicinske studenter, alle sunde og friske. Forsøgsanordningen var i regelen følgende:

Individerne tog bopæl paa det fysiologiske institut. Forsøgsperioden regnedes fra morgen til morgen før frokost. De veiedes hver morgen paa fastende hjerte, efterat have ladt sin urin. Alt, hvad de i løbet af døgnet fortærede, blev af dem selv veiet og bogført.

I urinen gjordes kvælstof- og acetonbestemmelser, i excrementerne kvælstof- og fedtbestemmelser.

Analyserne udførtes paa følgende maade:

Excrementerne tørredes og veiedes. Af tørsubstansen afveiedes aliquote dele til kvælstof- og fedtbestemmelser. De første foretoges efter *Kjeldahls* methode, de sidste ved extraktion og veining.

Af urinen afmaaltes 3 ccm. til kvælstofbestemmelse (*Kjeldahl*) og 100 ccm. til acetonbestemmelse (*Messinger-Hupperts* methode, se ovenfor s. 9 og 16). Ved paavisningen af en svag acetonuri har jeg i regelen ladet det være afgjørende, hvorvidt urindestillatet ved tilsætning af kalilud og jodopløsning blakkedes af udskilt jodoform. Jeg anser dette for et sikrere kreterium end den kvantitative bestemmelse, da urindestillatet ganske sikkert ogsaa indeholder andre substanser, der binder jod og derfor forhøier udfaldet af acetonbestemmelsen uden at give jodoformbundfald. Blakning indtræder i almindelighed, naar den kvantitative bestemmelse viser over 1,3—1,4 mgr. paa 100 ccm. urin. Kun i det tilfælde, at urinmængden pr. døgn har været liden (under 500 ccm.), har jeg seet blakning af destillatet, uden at der fornuftigvis kunde tales om en acetonuri. Jeg har f. ex. iagttaget jodoformreaktion, hvor den i døgnet udskilte acetonmængde bestemtes til blot 5,2 mgr. I en normal urin udgjør den sædvanlig 10—15 mgr. pr. døgn.

I mine første forsøg gjorde jeg i regelen jernchloridreaktion og til prøve paa β-oxysmørsyre, sukkerreaktion og polarimetrisk undersøgelse af urinen. Da imidlertid disse prøver stadig selv ved meget høi acetongehalt faldt negativt ud, undlod jeg at gjøre dem ved mine senere forsøg.

Ønskeligt havde det været, blandt andet til vurdering af de forskjellige hypotheser, om jeg for hvert forsøg havde kunnet opgjøre en nøiagtig stofvexelballance for kulstof og kvælstof. For kulstof lod dette sig af let forstaaelige grunde ikke gjennemføre og selv for kvælstof kun tilnærmelsesvis. Til beregning af den daglige kvælstofballance var det nemlig nødvendigt at kjende kostens kvælstofgehalt saa nøiagtig som muligt. Da en kvantitativ analyse af samme forekom mig ugjørlig ved siden af de talrige øvrige kvantitative bestemmelser, maatte jeg erstatte den med en beregning, skjønt en saadan selvfolgelig lader meget tilbage at ønske i nøiagtighed.

Med sikkerhed at paavise en kvælstofligevægt blev paa denne maade umuligt. Derimod kunde jeg ved beregning af en minimal og en maximal grænse, indenfor hvilke kostens kvælstofgehalt nødvendigvis maatte ligge, i visse tilfælde paavise et tab resp. en retention af kvælstof i organismen. Subtraheres nemlig urinens og excrementernes kvælstof fra kostens, saa repræsenterer differensen (*N*-afsætning i tabellerne) i tilfælde af, at den ved beregning af kostens mindste kvælstofgehalt blev positiv, en notorisk kvælstofafsætning, i tilfælde den ved beregning af kostens største kvælstofgehalt faldt negativ ud, et ligesaa notorisk kvælstoftab for organismen.

Beregningen af kostens mindst mulige gehalt paa æggehvide og kvælstof er foretagen efter følgende tabel, hvis værdier er hentede fra *König:* Chemie der menschlichen Nahrungs- und Genussmittel[1]. Kun ved beregningen af brødet benyttedes *Schmelck's*[49]) analyser af husholdningsbrødet i Christiania. I denne tabel er for oxe- og kalvekjød anført deres gehalt paa æggehvide i raa tilstand. Nu udgjorde oxekjød og tildels kalvekjød i alle forsøg med ensidig æggehvidekost hovedmassen af kostens kjødgehalt. De serveredes og veiedes tilberedt som beaf eller steg og har derfor indeholdt meget mere æggehvide end ved denne beregning forudsat.

	pct. æggehvide.	pct. fedt.	pct. kulhydrater.	
Magert oxekjød . .	20,7	1,7		*König* s. 190
— kalvekjød . .	19,9	0,8		— - 192
— skinke . . .	25,0	8,0		— - 229
Salt oxekjød . . .	27,0	5,0		— - 229
Hønseæg	12,6	12,1		— - 249
Fløde	3,8	22,7	4,2	— - 359
Smør		85,0		— - 369
Brød	6,4[2]	0,25	52,4	*Schmelck* 7

Liebigs kjødextrakt er regnet at indeholde 10,6 pCt. kvælstof: *König* s. 235.

[1]) Dritte Auflage Bd. 1.
[2]) Varierende mellem $6_{,90}$ og $6_{,81}$ pct.

Ved beregningen af kjødets største kvælstofgehalt er alt kjød regnet at indeholde 25 pct. æggehvide og 5 pct. fedt[51]).

For de øvrige fødemidlers vedkommende er de samme værdier bibeholdt som ved beregningen af deres mindste æggehvidegehalt. Denne er nemlig saa liden og varierer saa lidet, at dens indflydelse paa den beregnede kvælstofballance blir af mindre betydning.

Jeg antager, at den største værdi fjerner sig mindre fra kostens virkelige kvælstofgehalt end den mindste, hvorfor jeg har henholdt mig til den, naar jeg har villet bedømme sandsynligheden af en kvælstofligevægt.

Æggehviden er forudsat at indeholde 16 pct. kvælstof. Ved beregningen af kostens kaloriske værdi sattes et gr. fedt = 9,3, et gr. æggehvide og kulhydrater = 4,1 kalorier. *Rubner*[50]), der har opstillet disse værdier, har ved deres beregning kun for æggehvidestoffenes vedkommende taget hensyn til den spændkraft, som gaar tabt i excreterne. For fedt og kulhydrater har han forudsat fuldstændig resorption og forbrænding. Denne forudsætning har jeg ved beregningen af kostens kaloriske værdi i mine forsøg bibeholdt for kulhydraternes vedkommende, hvilke gaves i forholdsvis smaa mængder og vel derfor er resorberede næsten fuldstændigt, derimod ikke for fedtet, hvoraf der i excrementerne udskiltes ikke ubetydelige mængder. Jeg har derfor, naar jeg har bestemt fedtmængden i excrementerne, beregnet dens varmeværdi og trukket denne fra kostens samlede varmeværdi.

Det kaloriske behov for voxne mennesker, der ligesom mine forsøgsindivider kun udfører ringe legemligt arbeide, sættes af *Rubner*[50]) til 2445 kalorier pr. døgn.

A. I de følgende tabeller (I—V) findes en række forsøg over acetonuriens forhold ved *kulhydratfri kost,* med høi æggehvidegehalt og vexlende mængder af fedt.

Forsøg I. H. S., $20^{3}/_{4}$ aar. (Sidste afføring 1ste døgn kl. $7^{3}/_{4}$ fm.)

Døgn	Kgr. legems-vægt.	Gr. vægt-tab.	Kost.	Kost. Kalo-rier.	Kost. Gr. fedt.	Kost. Gr. N.	Excrementer. Affø-ring kl.	Excrementer. Gr. fedt.	Excrementer. Gr. N.	Afsat i legemet. Gr. N.	Afsat i legemet. Gr. kjød.	Urinen. Gr. N.	Urinen. Mgr. aceton i 100 ccm.	Urinen. Mgr. aceton Total-mængde	Urinen. ccm. urin-mængde
1	67,45	750	Beaf og oxesteg 434 gr. Kalvesteg . . . 209 „ Skinke . . . . 136 „ Salt kjød . . . 58 „ Æg . . . . . . 79 „ Smør. . . . . 237 „	3027	249	30,58	$6^{3}/_{4}$ em. 95 gr.	7,7	1,44	+1,30	+ 38	27,84	6,01	115,82	1927
2	66,7	200	Beaf og oxesteg 518 gr. Kalvesteg . . . 80 „ Skinke . . . . 71 „ Salt kjød . . . 22 „ Æg . . . . . . 77 „ Smør. . . . . 522 „	4633	469	25,04	$11^{1}/_{2}$ fm., $6^{1}/_{4}$ em., $1^{1}/_{2}$ fm. 432 gr.	40,0	3,87	—8,15	—240	29,33	21,75	369,67	1700
3	66,5	300	Beaf og oxesteg 484 gr. Kalvesteg . . . 156 „ Skinke . . . . . 59 „ Salt kjød . . . 43 „ Æg . . . . . . 101 „	798	29	27,25	$1^{3}/_{4}$ em. 194 gr.	17,7	0,65	—7,46	—219	34,06	9,14	144,34	1580
4	66,2	200[1]	Beaf og oxesteg 611 gr. Skinke . . . . 51 „ Salt kjød . . . 112 „ Æg . . . . . . 178 „	1174	42	30,70	0			—4,61	—136	35,31	4,68	78,4	1677
5	66,4														
	Sum:	1050 gr. vægttab.								Sum:	—557 gr.				
	—	557 „ kjødtab.													
		493													
1	Efter høieste beregning af kosten.			3142	253	37,50				+8,22	+242				
2				4996	488	32,51				—0,68	— 20				
3				1198	49	35,28				+0,57	+ 17				
4				1540	60	38,30				+2.99	+ 88				

[1]) Betyder tiltagen i vægt.

Forsøg II. M. H., 20 aar.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. vægt-tab.	Kost.				Excrementer.			Afsat i legemet.		Urinen.			
				Kalo-rier.	Gr. fedt.	Gr. N.	Affør. kl.	Gr. fedt.	Gr. N.	Gr. N.	Gr. kjød.	Gr. N.	Mgr. aceton i 100 ccm.	Mgr. aceton Total-mængde	Ccm. urin-mængde
1	75	1500	Oxesteg . . . 409 gr. Kalvesteg . . 191 „ Salt kjød . . 128 „ Skinke . . . 118 „ Æg . . . . . 105 „ Smør . . . . 119 „	1950	138	31,88	7½ em. 514 gr.	16,3	4,35	—3,01	— 89	30,51	1,82 svagt bundf.	33,11	1824
2	73,5	500	Oxesteg . . . 360 gr. Kalvesteg . . 230 „ Salt kjød . . 87 „ Skinke . . 198 „ Æg . . . . . 87 „ Smør . . . . 236 „	2892	239	32,67	7 fm. 418 gr.	18,4	2,71	—6,40	—188	36,36	3,99 36,01 Sum:	60,17 183,65 243,82	1508[1] 510[2] 2018
3	73	1000	Oxesteg . . . 400 gr. Salt kjød . . 65 „ Æg . . . . . 88 „ Smør . . . . 105 „	1479	110	17,83				—15,85	—466	33,68	5,83	94,92	1628
4	72														
	Sum: 3000 gr. vægttab. 743 „ kjødtab. 2257									Sum: —743 gr.					
1 2 3	Efter høieste beregning af kosten.			2326 3249 1725	156 255 123	40,02 40,95 22,61				+ 5,13 + 1,88 —11,07	—151 — 52 —326				

[1]) Urin indtil om aftenen.
[2]) Natteurin.

Forsøg III. N. H., 21 1/2 aar. (Sidste gang afføring dagen før første forsøgsdag om morgenen).

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. vægt-tab.	Kost.				Excrementer.			Afsat i legemet.		Urinen.			
				Kalorier.	Gr. fedt.	Gr. N.	Affør. kl.	Gr. fedt.	Gr. N.	Gr. N.	Gr. kjød.	Gr. N.	Mgr. aceton i 100 ccm.	Mgr. aceton Total mængde	Ccm. urin-mængde
1	70,5	+300	Beaf . . . . 407 gr. Kalvesteg . . 67 „ Skinke . . . 110 „ Salt kjød . . 46 „ Æg . . . . . 121 „ Smør . . . . 300 „	3305	288	24,42				+2,43	+ 71	22,00	25,42	275,81	1085
2	70,8	—600	Beaf . . . . 328 gr. Kalvesteg . . 69 „ Skinke . . . 23 „ Salt kjød . . 55 „ Æg . . . . . 205 „ Smør . . . . 300 „	3182	291	20,50	8 1/4 fm. 48 gr.	4,9	0,87	—3,74	—110	23,37	27,36	302,1	1108
3	70,2	0	Beaf . . . . 222 gr. Kalvesteg . . 125 „ Skinke . . . 48 „ Salt kjød . . 24 „ Æg . . . . . 198 „	695	34	18,29	4 em. 103 gr.	9,5	1,24	— 8,27	—243	25,32	34,86	369,52	1060
4	70,2	0	Beaf . . . . 446 gr. Skinke . . . 44 „ Æg . . . . . 135 „	548	27	19,25	Om fm. 148 gr.	21,5	1,91	—9,88	—291	27,22	32,11	395,92	1233
5	70,2														

Sum: 300 gr. vægttab. Sum: —573 gr.

Døgn.		Kalorier.	Gr. fedt.	Gr. N.	Gr. N.	Gr. kjød.
1	Efter høieste beregning af kosten.	3577	300	30,66	+8,59	+253
2		3429	304	25,41	+1,17	+ 34
3		914	45	22,75	—3,81	—112
4		812	41	24,67	—4,46	—131

Forsøg IV. J. A., 21 1/2 aar.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. vægt-tab.	Kost.	Kost. Kalo-rier.	Kost. Gr. fedt.	Kost. Gr. N.	Excrementer. Affør. kl.	Excrementer. Gr. fedt.	Excrementer. Gr. N.	Afsat i legemet. Gr. N.	Afsat i legemet. Gr. kjød.	Urinen. Gr. N.	Urinen. Mgr. aceton i 100 ccm.	Urinen. Mgr. aceton Total mængde	Urinen. Ccm. urin-mængde
1	73,5	1900	Oxesteg . . . 580 gr. Kalvesteg . . 93 „ Skinke . . . 78 „ Salt kjød . . 22 „ Æg . . . . . 177 „	1099	39	29,81	1 1/2 em. og 6 1/2 em. tils. 69 gr.	4,2	1,07	— 3,28	— 96	32,02	3,10	72,02	2327
2	71,6	200	Beaf og oxesteg 222 gr. Kalvesteg . . . 89 „ Salt kjød . . . 104 „ Æg . . . . . 126 „ Smør . . . . 159 „	1931	160	17,23				—10,22	—301	27,45	12,94	171,37	1325
3	71,4	0	Beaf og oxesteg 331 gr. Skinke . . . . 18 „ Salt kjød . . . 119 „ Æg . . . . . 214 „	904	39	21,14				—10,13	—298	31,27	14,71	221,83	1542
4	71,4						8 fm. 3 1/2 gr.	0,4 (11,1 %)	0,08						
	Sum:	2100 gr. — 695 „ kjødtab 1405								Sum: 695 gr.					
1			Efter høieste beregning af kosten.	1499	60	38,19				+ 5,10	+150				
2				2134	171	21,14				— 6,31	—186				
3				1107	49	25,28				— 5,99	—176				

Forsøg V. A. D. H., 21$^{1}/_{2}$ aar.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. vægt-tab.	Kost.				Excrementer.			Afsat i legemet.		Urinen.			
				Kalo-rier.	Gr. fedt.	Gr. N.	Affør. kl.	Gr. fedt.	Gr. N.	Gr. N.	Gr. kjød.	Gr. N.	Mgr. aceton i 100 ccm.	Mgr. aceton Total-mængde	Ccm. urin-mængde
1			Alm. huskost				5 em.					15,93	1,18	15,75	1334
2	63,0	1500	Oxesteg og beaf 549 gr. Kalvesteg . . . 131 „ Salt kjød . . . 35 „ Skinke . . . . 17 „ Æg . . . . . . 92 „	842	25	26,42	11 fm. og 7$^{3}/_{4}$ em.	6,9	2,28	— 1,06	— 31	25,20	1,34 svagt bundf.	21,63	1614
3	61,5	1000	Beaf og oxesteg 588 gr. Kalvesteg . . . 67 „ Skinke . . . . 77 „ Æg . . . . . . 78 „	916	26	26,26				— 8,05	—237	34,31	2,49 bundf.	45,97	1846
4	60,5	300	Smør i 4 portioner . . . . 110 gr.	823	94					—20,11	—591	20,11	37,20	359,68	967
5	60,2		Frokost: Smør . . . . 18 gr.				10$^{1}/_{4}$ fm.	5,1	1,35						
	Sum:	2800 ÷ 859 1941	gr. vægttab „ kjødtab							Sum: 859 gr.					
1 2	Efter høieste beregning af kosten.			1268 1309	48 46	34,66 34,37				+ 7,18 + 0,06	+211 + 2				

(Til *Forsøg I*).

I de to første forsøgsdage blandet kjød- og fedtkost til en kalorisk værdi langt større end behovet, senere ren kjødkost med utilstrækkelig kalorisk værdi. Første dag paaviselig kvælstofafsætning, de tre følgende dage sandsynligvis kvælstofligevægt. Første dag stærkt vægttab, senere mindre, sidste dag endog forøgelse af legemsvægten.

Ved beregning af kostens mindste kvælstofgehalt faaes det *størst mulige kvælstoftab*. Omregnes dette i kjød med 3,4 pct. kvælstof[52]), saa viser det samlede *kjødtab* sig at være mindre end vægttabet.

Ligefra første forsøgsdag stærk acetonuri, der til- og aftager med kostens fedtgehalt.

(Til *Forsøg II*).

Dette forsøg blev afbrudt, fordi forsøgsindividet tilslut ikke uden stor overvindelse kunde fortære den foreskrevne kost. Den fremkaldte kvalme og i de to første forsøgsdage kolik og diarrhoe. Den bestod alle forsøgsdage af kjød og fedt. Den første dag er der sandsynligvis tilbageholdt noget kvælstof, anden dag sandsynligvis kvælstofligevægt, tredie dag paaviselig et betydeligt kvælstoftab. Under hele forsøget jævnt vægttab, idethele 3000 gr., der kun for en ringe del dækkes af det maximalt beregnede kjødtab.

Under hele forsøget betydelig acetonuri, til- og aftagende med kostens fedtgehalt.

(Til *Forsøg III*).

Første og anden dag kjød- og fedtkost af kalorisk værdi større end behovet, 3die og 4de dag ren kjødkost af kalorisk værdi mindre end halvdelen af behovet. Fedtet synes at være resorberet langsomt, ialfald stiger fedtmængden i excrementerne under hele forsøget.

Vægttabet ringe, indskrænket til 2den forsøgsdag, 3die og 4de dag uforandret legemsvægt trods paaviseligt kjødtab. Første dag paaviselig afsætning af æggehvide.

Meget stærk acetonuri under hele forsøget.

(Til *Forsøg IV*).

Dette forsøg blev afbrudt, fordi forsøgsindividet følte sig mat og svimmel og ønskede at ophøre.

Første dag ren kjødkost, anden dag kjød- og fedtkost, tredie dag ren kjødkost. Det kaloriske behov dækkedes ikke. Fedtet synes at være langsomt resorberet. En liden afføring fjerde forsøgsdag indeholdt nemlig 11 pct. fedt.

Vægttabet størst første forsøgsdag. Tredie dag intet vægttab. Første dag sandsynligvis kvælstof tilbageholdt, anden og tredie dag paaviselig et betydeligt tab. Det samlede kjødtab dækker omtrent kun en trediedel af vægttabet. Acetonurien betydelig, stigende under hele forsøget.

(Til *Forsøg V*).

Forsøgsindividet følte sig mat, sov meget. Første og anden dag ren kjødkost. Tredie dag ren fedtkost. Det kaloriske behov ikke dækket. Første dag sandsynligvis kvælstof afsat i legemet. Tredie dag paaviselig et betydeligt kvælstoftab. Vægttabet betydeligt, stærkest første dag, mindre anden dag, ubetydeligt tredie dag. Det samlede kjødtab dækker ikke en trediedel af vægttabet.

De to første forsøgsdage svag, sidste dag meget stærk acetonuri.

Hvad der ved disse forsøg er mest iøinespringende, er den paatagelige *parallelisme mellem kostens fedtgehalt og acetonuriens styrke.* For de to første og for sidste forsøgs vedkommende kan denne parallelisme bedst forfølges, idet acetonurien til- og aftager fra dag til anden med kostens fedtgehalt. I 3die og 4de forsøg er den mindre fremtrædende, forsaavidt som acetonurien ikke aftager, efterat fedtet er fjernet af kosten. Imidlertid synes afføringens fedtgehalt i disse forsøg at vise, at resorptionen af fedt har været langsom og strakt sig ud ogsaa over de dage, i hvilke der ikke tilførtes fedt med kosten.

Ved sammenligning af de forskjellige forsøg viser parallelismen mellem kostens fedtgehalt og acetonuriens styrke sig deri, at der i de to forsøg (I og III), i hvilke der allerede første dag gaves blandet kjød- og fedtkost, strax indtræder en betydelig acetonuri, medens den ved ren kjødkost holder sig lav (forsøg IV, V og de senere anførte VI og VII).

I de fleste af forsøgene har der efter al sandsynlighed fundet sted en omsætning af rigelige mængder af legemets eget fedt. Dette er selvsagt i de forsøg, der begynder med ublandet kjødkost, da en saadan hos mennesker aldrig kan dække det kaloriske behov. Det fremgaar ogsaa af forsøgene, forsaavidt som tabet af «kjød» ikke er tilstrækkeligt til at dække vægttabet*). Det samme forhold finder sted ogsaa i to af forsøgene med blandet kjød- og fedtkost (I og II). Særlig er i forsøg II differensen mellem vægttab og kjødtab for stor til at forklares paa anden maade end ved tab af legemsfedt. Nogen parallelisme mellem det saaledes beregnede fedttab og acetonuriens styrke fremgaar ikke af forsøgene.

Den omstændighed, at fedtomsætning synes at være det vigtigste aarsagsmoment til fremkaldelse af acetonuri, er hidindtil saagodtsom fuldstændig undgaaet opmærksomheden. Af nyere arbeider over acetonuri er *Rosenfeld's*[30]) det eneste, i hvilket fedtets indflydelse paa en acetonuri diskuteres. Han tillægger det kun en modererende indflydelse, forsaavidt det paavirker æggehvideomsætningen. *Rosenfeld's* forsøg tillader imidlertie ikke de af ham dragne slutninger. De fleste af dem strækker sig kun over en dag, i hvilken tid acetonurien oftest endnu kun er lidet udviklet. Meget mere værdifulde er *Hirschfeld's*[28]) forsøg. Hans forsøgsobjekter levede paa kulhydratfri kost lige indtil 10 (!)

*) Cfr. *Voit*[52]) S. 74 og 350.

dage. De viser da ogsaa en for hver dag tiltagende acetonudskillelse i urinen, indtil 0,7 gr. pr. døgn, ved større mængder aceton tillige udskillelse af diacetsyre. *Hirschfeld* tillægger ikke fedtomsætningen nogen betydning for acetonudskillelsen. Jeg har sammenstillet hans forsøgsresultater med hensyn paa dette punkt, men i disse kun antydningsvis kunnet paavise nogen parallelisme mellem fedtmængden i næringen og acetonuriens grad. De synes altsaa direkte at stride mod resultaterne af mine forsøg. Forklaringen paa denne uoverensstemmelse turde være at søge i to omstændigheder, for det første deri, at *Hirschfeld's* forsøgsindivider fik forholdsvis smaa mængder fedt, fra 46 til 197 gr., medens hos mine næringens fedtgehalt varierede mellem 25 og 469 gr. pr. dag, for det andet i den baade af *Rosenfeld* og *Hirschfeld* gjorte erfaring, *at acetonurien ved tilførsel af store mængder æggehvide er svagere end ved tilførsel af smaa.* I *Hirschfeld's* forsøg har aabenbart kostens fedtgehalt været saa liden, at æggehvidegehaltens variation har virket bestemmende paa acetonuriens grad, i mine forsøg er denne faktor traadt i baggrunden for virkningen af de store mængder fedt i næringen.

Baade *Rosenfeld* og *Hirschfeld* er med *Weintraud*[38]) enige i, at en acetonuri ikke er afhængig af, hvorvidt der destrueres legemsæggehvide. Hellerikke af mine forsøg fremgaar nogen saadan afhængighed. Vi ser tvertimod stærk acetonuri ved paaviselig retention af kvælstof i organismen (forsøg I og II) og paa den anden side en aftagen af acetonurien, samtidig med, at kvælstoftabet stiger meget stærkt (forsøg II). *Rosenfeld* holder acetonurien — selvfølgelig under forudsætning af, at en kulhydratomsætning er udelukket — for «eine Function eines mässigen Eiweisszerfalles» og anser æggehvjdestoffene i næringen som den væsentligste modersubstans til acetonet. Mine forsøg støtter ligesaalidt denne som *Honigmann's* og *v. Noorden's* hypothese. I de fleste af dem er der omsat saadanne mængder æggehvide som de, *Rosenfeld* betegner som store, og som kun skulde betinge en svag acetonuri. Ikkedestomindre er acetonurien meget betydelig i mine forsøg, saasnart der tilføres store mængder fedt, medens den ved *Rosenfeld's* forsøg med rigelig æggehvidenæring uden fedt kun gaar op til 42 mgr. pr. døgn.

B. I de følgende tabeller (VI—XIII) findes en række forsøg over acetonuriens forhold ved blandet *kulhydratholdig føde.*

Forsøg VI. A. M.-R., 22 aar.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. vægt-tab.	Kost.					Afsat i legemet.		Urinen.			
				Kalorier.	Gr. kulhydrater.	Gr. fedt.	Gr. N.	Gr. N.	Gr. kjød.	Gr. N.	Mgr. aceton i 100 ccm.	Mgr. aceton Totalmængde	Ccm. urinmængde
1	54,9	980	Beaf og oxesteg . . . . . 424 gr. Kalvesteg . . . . 210 " Æg . . . . 42 " Mager skinke . . . . . . 35 "	692		11,1	23,0	— 3,2	— 94	26,2	1,05 blakning.	16,0	1526
2	53,92	570	Beaf og oxesteg . . . . . 573 gr. Kalvesteg . . . . 37 " Æg . . . . 81 " Mager skinke . . . . . . 29 "	794		22,1	23,0	— 7,02	—206	30,02	1,93 bundfald.	28,4	1470
3	53,35	+150	Frokost: Æg . . . . 77 gr. Skinke . . . . 29 " Salt kjød . . . . 34 " Middag og aften: Sukker . . . . 155,6 " Stivelse . . . . 49,6 " Tørsubstans i saft[1] . . . 109,1 "	1520	314,3	13,3	4,19	—14,5	—428	18,73	*Urin indtil om aftenen* 0,83 blakn. *Natteurin* 0,79 ingen blakn.	 11,18 2,63	335
4	53,50												

Sum: 1400 gr. vægttab
— 728 " kjødtab
672

Sum: 728 gr.

Urin flere dage senere 0,83 9,97 1208
ingen blakn.

1	Efter høieste beregning af kosten.	1087		38,6	30,82	+ 4,62	+136	
2		1164		41,8	30,26	+ 0,24	+ 7	
3		1516		12,5	4,37	—14,36	—422	

[1]) Beregnet som rent kulhydrat.

Forsøg VII. H. P.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. Vægt-tab.	Kost.					Excrementer.		Afsat i legemet.		Urinen.			
				Kalo-rier.	Gr. kul-hydra-ter.	Gr. fedt.	Gr. N.	Affør. kl.	Gr. N.	Gr. N.	Gr. kjød.	Gr. N.	Mgr. aceton i 100 ccm.	Mgr. aceton Total-mængde	Ccm. urin-mængde
1			Alm. huskost.									13,33	1,16	13,75	1181
2	65,0	500 (Døgn 2–3)	Alm. huskost.					om morgenen				15,56	1,27	15,83	1251
3			Beaf og oxesteg 451 gr. Kalvesteg . . . 128 „ Æg . . . . . 75 „ Salt kjød . . . 30 „ Skinke . . . . 34 „ Liebig's extract 6 „	795		22	23,68	8 em.	1,75	+ 5,54	+163	16,39	2,04 blakn.	25,01	1228
4	64,5	1600	Beaf og oxesteg 490 gr. Kalvesteg . . . 58 „ Skinke . . . . 118 „ Salt kjød . . . 95 „ Æg . . . . . 87 „ Liebig's extract 2 „	1046		34	28,87	3 3/4 em.	2,71	−19,80	−582	45,96	3,36 bundf.	71,71	2133
5	62,9	400	Brød . . . . . 500 gr. Sukker . . . . 400 „	1369		1,3	5,12			−14,57	−429	19,69	1,66 blakn.	15,7	947
6	62,5		Frokost: Brød . . . . . 75 gr.	176		0,2	0,77	12 1/2 em.	1,20				1,37 ingen blakn.		103
	Sum: 2500 gr. vægttab ÷ 848 „ kjødtab 1652									Sum: 848 gr.					
3 4	Efter høieste beregning af kosten.			1161 1371		41 49	30,80 36,10			+12,66 −12,57	+372 −370				

Forsøg VIII. J. K., $21^1/_2$ aar.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. vægt-tab.	Kost.	Kost. Kalorier.	Kost. Gr. kulhydrater.	Kost. Gr. fedt.	Kost. Gr. N.	Afsat i legemet. Gr. N.	Afsat i legemet. Gr. kjød.	Urinen. Gr. N.	Urinen. Mgr. aceton i 100 ccm.	Urinen. Mgr. aceton Totalmængde	Urinen. Ccm. urinmængde
1	68,5	1000	Smør . . . . 286 gr.	2261		243		—13,85	—307	13,85	7,62 bundf.	82,93	1089
2	67,5	1000	Frokost: Smør . . . . 112 gr. Middag og aften: Brød . . . . 340 „	1713	178	96	3,49	— 8,73	- 257	12,22	13,45 bundf.	82,82	616
3	66,5	0	Brød . . . . 500 gr. Sukker . . . . 57 „	1461	319	1,3	5,12	— 1,97	— 58	7,09	1,77 blakn.	1,77	439
4	66,5		Frokost: Brød . . . . 175 gr.								1,88 blakn.		ca. 170

Sum: 2000 gr. vægttab
— 622 „ kjødtab
1378

Sum: 622

Forsøg IX.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. N. i kosten.	Gr. N. i urinen.	Gr. N. i excremente.	Mgr. aceton i 100 ccm. urin.	Mgr. aceton Total-mængde	Ccm. urin-mængde
1	75,5[1])		(15,45)		1,36	20,54	1510
2	74,35	11,91	19,69	1,48[3])	0,95	9,22	975
3	73,50	11,91	12,85	3,45	0,82	7,88	761
4	73,50	11,62	9,93	4,20	0,97	7,12	761
5	74,00	11,61	15,27	3,15	1,05	12,73	1218
6	73,66	10,53	9,50	2,65	0,58	5,28	910

Sum: 57,58 | 67,21 + 14,93 = 82,17
Vægttab 1100 gr., N.-tab 24,59 = 723 gr. kjød.
Vægttab — kjødtab = 377 gr.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. N. i kosten.	Gr. N. i urinen.	Gr. N. i excrementer.	Mgr. aceton i 100 ccm. urin.	Mgr. aceton Total-mængde	Ccm. urin-mængde
7	73,25[2])	21,00	16,40	2,89	0,97	15,49	1583
8	73,15	10,55	11,38		1,04	10,11	972
9	72,10	10,86	10,30	9,14	1,01	8,17	813
10	71,87	10,93	11,30	1,01	1,09	8,58	791
11	71,65	10,72	10,29	1,19	0,93	7,27	781
12	71,90	10,68	9,90	3,56	1,05	8,11	776

Sum: 74,74 | 69,57 + 17,79 = 87,36
Vægttab 810 gr., N.-tab 12,62 gr. = 371 gr. kjød.
Vægttab — kjødtab = 439 gr.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. N. i kosten.	Gr. N. i urinen.	Gr. N. i excremente.	Mgr. aceton i 100 ccm. urin.	Mgr. aceton Total-mængde	Ccm. urin-mængde
13	72,44[2])	21,00	21,27		0,46	7,48	1626
14	72,10	10,69	14,50	5,20	0,52	5,69	1126
15	71,80	10,91	10,47	5,11	1,14	9,26	816
16	71,60	11,08	11,25		1,08	9,03	836
17	71,22	11,26	10,91	3,17	1,19	9,86	832
18	71,50	11,10	11,02	3,37	1,07	9,67	909

Sum: 76,04 | 79,42 + 16,88 = 96,30
Vægttab 1540 gr., N.-tab 20,26 gr. = 596 gr. kjød.
Vægttab — kjødtab = 944 gr.

Døgn.	Kgr. legems-vægt.	Gr. N. i kosten.	Gr. N. i urinen.	Gr. N. i excrementer.	Mgr. aceton i 100 ccm. urin.	Mgr. aceton Total-mængde	Ccm. urin-mængde
19	70,90[2])	21,00	18,66	3,13	0,76	11,06	1455
20	71,07[2])	21,00	17,01	4,70	1,29	17,44	1352
21	70,55	10,11	11,68		0,90	8,67	963
22	70,15	11,50	9,77	2,99	2,47	14,97	606
23	70,64	11,44	8,67	2,95	0,97	6,14	636
24	70,20	11,51	11,24	4,04	1,05	8,97	854
25	70,20	11,73	9,25	2,43	1,23	7,88	640

Sum: 98,29 | 86,28 + 20,23 = 106,51
Vægttab 140 gr., N.-tab 8,22 gr. = 242 gr. kjød.
Vægttab — kjødtab = — 102 gr.

26	70,76[2]	21,00	12,03	3,60	0,83	8,66	1049
27	71,46[2]	16,95	12,60		0,44	7,56	1718
28	72,34	11,34	8,62	3,82	0,75	7,54	1012
29	70,06	10,87	8,60	3,04	1,31	8,85	676
30	70,04	10,73	8,37	4,17	1,16	7,11	613
31	69,66	11,04	8,99	5,10	0,70	4,89	698
32	69,54	10,84	9,16		0,88	5,77	656

Sum: 92,77 | 68,37 + 19,73 = 88,10
Vægttab 1320 gr., N. afsat 4,67 gr. = 137 gr. kjød.
Vægttab + kjødtab = 1457 gr.

33	69,44[2]	27,45	14,13	3,71	0,70	7,45	1071
34	70,74[2]	16,95	17,46		0,95	17,29	1820
35	70,31[2]	26,55	15,25	4,23	0,76	15,21	2001
36	70,01	10,32	10,17	6,30	1,01	9,68	958
37	68,64	10,57	6,39		1,28	5,90	461
38	68,64	10,16	11,38	2,17	1,24	9,51	767
39	67,74						

Sum: 102,00 | 74,78 + 16,41 = 91,19
Vægttab 1700 gr., N. afsat 10,81 gr. = 318 gr. kjød.
Vægttab + kjødtab = 2018 gr.

1) Ved beregning af vægttab osv. er denne ufuldstændige forsøgsdag udelukket.
2) Mellemfristdage.
3) Værdierne for excrementernes N.-gehalt er mig overladte af hr. cand. med. *I. Bang*.

(Til *Forsøg VI*).

Dette og det følgende forsøg er parallelforsøg til no. V, hvis fedtkost paa tredie forsøgsdag her er erstattet af en kulhydratkost.

Hele første og anden dag til frokost ren kjødkost. Tredie dag til middag og aften samt fjerde dag til frokost ren kulhydratkost, en suppe lavet af stivelsejævning, sukker og bringebærsaft. Alle tre dage kaloriunderskud. Første og anden dag vægttab, tredie dag tiltagen i vægt.

Der er ikke gjort kvælstofbestemmelser i excrementerne. Derved er kvælstoftabet blevet noget for lavt beregnet. Da imidlertid feilen er liden i forhold til kvælstoftabets absolute størrelse, kan den sættes ud af betragtning. Det er sandsynligt, at der første dag har fundet kvælstofafsætning, anden dag kvælstofligevægt sted. Under alle omstændigheder har der tredie dag samtidig med, at legemsvægten tiltager, fundet et anseligt kvælstoftab sted. Det beregnede kjødtab er ikke tilstrækkeligt til at dække vægttabet.

Kjødkosten har fremkaldt svag acetonuri, der svinder i løbet af nogle timer ved indførelsen af ren kulhydratkost.

(Til *Forsøg VII*).

Første og anden dag ren kjødkost, tredie dag og til frokost fjerde dag kulhydratkost. Alle 3 dage kaloriunderskud. Første dag paaviselig kvælstofafsætning i legemet, anden og tredie dag stort kvælstoftab. Af vægttabet, der væsentlig falder paa de to første dage, dækkes kun henimod en trediedel af kjødtabet.

Kjødkosten fremkaldte maadelig acetonuri, der svandt ved indførelse af kulhydratkost.

(Til *Forsøg VIII*).

Første dag ren fedtkost, anden dag fedt- og kulhydratkost, tredie dag og til frokost fjerde dag kulhydratkost. Det kaloriske behov kun første dag tilnærmelsesvis dækket. De to første dage stærkt vægttab, som kun delvis dækkes af kjødtabet. (Det sidste noget lavt beregnet, da kvælstoffet i excrementerne ei er taget i betragtning). Ved indførelsen af kulhydratkosten ophører vægttabet og kvælstoftabet blir lidet. Samtidig synker urinmængden stærkt.

Fedtkosten fremkaldte maadelig acetonuri, der svandt efter indførelse af kulhydratkost.

(Til *Forsøg IX*).

Dette forsøg er anstillet med en straffange, der var idømt 40 dages fængsel paa vand og brød*). Den daglige straffekost bestod foruden af vand og kogsalt af 750 gr. grovt rugbrød. Dettes kvælstofgehalt bestemtes af daværende assistent ved det fysiologiske institut, hr. cand. med. *I. Bang*, der velvillig har overladt mig de fundne værdier til afbenyttelse. Fremgangsmaaden var følgende: Den fangen tildelte ration veiedes, og af samme brød toges ca. 10 gr. til tørsubstansbestemmelse. Kvælstofgehalten i tørsubstansen bestemtes ved *Kjeldahl's* methode i gjennemsnitsprøver for 6 forsøgsdage. Der fandtes $20{,}96$ — $21{,}26$ — $22{,}33$ — $23{,}45$ — $28{,}85$ — i gjennemsnit $21{,}96$ mgr. kvælstof pr. gr. tørsubstans. Brødets efter disse bestemmelser beregnede æggehvidegehalt udgjorde i gjennemsnit $9{,}13$ pct. Efter *Schmelck*[49]) indeholder saadant brød gjennemsnitlig $0{,}55$ pct. fedt og $51{,}46$ pbt. kulhydrater. Den kaloriske værdi af 750 gr. blir da 1902 kalorier. Fangens kaloriske behov kan ved det rolige fængselsliv sættes til 2445 kalorier (*Rubner*[50])). Kosten maa altsaa have medført en betydelig undernæring.

Jeg har inddelt forsøget i perioder paa 6 eller 7 dage, der alle begynder med en «mellemfristdag», paa hvilken fangen fik almindelig fangekost, og beregnet kvælstoftab, vægttab osv. for hver saadan periode. 2den og 3die periode begynder med en, 4de og 5te med to og 6te periode med tre mellemfristdage, hvorefter følger fem dage med straffekost. «Mellemfristkosten» bestod under hele straffen til frokost og aften af tilsammen

	Pct. æggehvide.	Gr. æggehvide.	Kilde.
500 gr. fint rugbrød	$6{,}4$	$32{,}0$	*Schmelck.*
1 liter melk	$3{,}26$	$32{,}6$	*König* S. 387.
15 gr. smør	$0{,}8$	$0{,}1$	— - 369.
		$64{,}7$ =	$10{,}3$ gr. kvælstof.

*) Forsøget tilhører en række undersøgelser, der blev udført paa det fysiologiske institut over vand- og brødstraffens virkning paa fangernes ernæringstilstand.

Middagen bestod til og med 26de forsøgsdag af

	Pct. N.	Pct. æggehvide.	Gr. æggehvide	Gr. N.	Kilde.
250 gr. renskaaret oxekjød afveiet i frisk tilstand og tilberedt som beaf		20,7	51,8	8,3	*König* S. 190.
100 gr. poteter	0,4			0,4	— - 665.
1/2 liter bouillon . . .	0,4			2,0	
				10,7	

Fra den 27de forsøgsdag blev mellemfristkostens middagsmad leveret fra Christiania dampkjøkken. Jeg har efter opgaver fra dampkjøkkenet beregnet dens kvælstofgehalt. De fundne værdier tør imidlertid være behæftede med store feil.

Forsøget viser et betydeligt vægttab. Regnes begyndelsesvægten til 75,5 kgr., saa udgjør vægttabet 7,76 kgr. (over 10 pct. af legemsvægten). Det er uregelmæssig fordelt paa de forskjellige forsøgsperioder, stærkest i første og sidste.

I de tre første forsøgsperioder har der fundet et betydeligt kjødtab sted, tilsammen 1690 gr. Det dækker næsten halvdelen af vægttabet, 3450 gr.

I de følgende perioder er resultaterne paa grund af den usikre beregning af kosten paa de talrige mellemfristdage mindre paalidelige. Forholdet mellem vægttab og kjødtab blir uregelmæssigere. I 4de periode er kjødtabet 102 gr. større end vægttabet, hvilket skulde tyde paa, at fangen har lagt paa sig vand eller fedt, men tabt endnu mere kjød. I 5te og 6te periode har han lagt paa sig kjød. Ikkedestomindre er vægttabet stort i disse perioder, hvilket vel væsentlig har havt sin grund i, at mellemfristkosten fremkaldte fordøielsesforstyrrelser. Han maa i disse perioder have tabt fedt, ikke alene svarende til vægttabet, men ogsaa til det afsatte kjød.

Acetonuri indtraadte ikke under hele forsøget.

Vi ser i de tre første af disse forsøg en acetonuri fremkaldt ved kjødkost, fedtkost eller blandet kjød- og fedtkost. Kosten har bevirket et vægttab, der delvis skyldes et æggehvidetab, men sandsynligvis for den væsentligste del et tab af fedt. Ved indførelsen af kulhydratkosten stanser vægttabet trods vedholdende tab af æggehvide. Samtidig svinder acetonurien.

I forsøg IX ser vi et betydeligt, gjennem længere tid fortsat vægttab, der udentvil skyldes et tab saavel af fedt som af æggehvide, uden at der indtræder spor af acetonuri.

Af en sammenligning mellem disse forsøg og de tidligere meddelte fremgaar, *at en kulhydratholdig kost, selv om den er utilstrækkelig til at dække legemets kaloriske behov, ikke fremkalder nogen acetonuri, at den tvertimod i løbet af nogle faa timer bringer en bestaaende acetonuri til at svinde, medens en kulhydratfri kost, selv om den har en overflødig kalorisk værdi, og ellers indeholder alle til livets ophold nødvendige bestanddele, fremkalder acetonuri.*

Forsøgene bekræfter altsaa paa ethvert punkt de af *Hirschfeld*[28]) og *Rosenfeld*[30]) gjorte erfaringer over kulhydraternes evne til at hindre en acetonuri fra at opstaa eller bringe en bestaaende acetonuri til at svinde.

Under disse omstændigheder reiser sig spørgsmaalet om, *hvorvidt denne evnes effektivitet er proportional med mængden af de i legemet omsatte kulhydrater, eller om de lig et ferment formaar fuldstændig at hindre en acetonuri, selv om de kun omsættes i smaa mængder.*

Til belysning af dette spørgsmaal har jeg udført en række af 5 forsøg, 3 i hvilke der til en ren kjødkost eller blandet kjød- og fedtkost lagdes kulhydrater i daglig stigende mængder, indtil acetonnrien svandt, og 2 forsøg med udelukkende brødkost af meget liden kalorisk værdi.

Forsøg X. O. S.

Døgn.	Kgr. legemsvægt.	Kost.		Kost.			Urinen.		
				Kalorier.	Gr. kulhydrater.	Gr. fedt.	Mgr. aceton i 100 ccm.	Mgr. aceton Total-mængde.	Ccm. urinmængde
1		Beaf Skinke Salt kjød Æg Smør Sukker Fløde	308 gr. 50 „ 16 „ 115 „ 84 „ 10 „ ca. 100 „	1544	10	118	3,83	65,45	1711
2	64	Beaf Kalvesteg Skinke Salt kjød Æg Smør Sukker Fløde	223 gr. 72 „ 180 „ 44 „ 222 „ 153 „ 10 „ ca. 100 „	2519	10	201	14,66	215,80	1472
3	64	Oxesteg Kalvesteg Skinke Salt kjød Æg Smør Sukker Fløde	201 gr. 86 „ 95 „ 16 „ 227 „ 135 „ 30 „ 94 „	1876	30	149	17,29	223,32	1292
4		Oxekjød Kalvesteg Skinke Æg Smør Sukker Fløde	166 gr. 117 „ 113 „ 218 „ 123 „ 90 „ 152 „	2604	90	188	14,30	157,30	1100

5	63	Oxesteg 123 gr. Kalvesteg 84 „ Skinke 91 „ Æg 166 „ Smør 119 „ Sukker 150 „ Fløde 119 „	2459	150	158	3,71 bundfald.	26,42	712
6	63	Frokost: Kalvesteg 17 gr. Skinke 54 „ Smør 22 „ Æg 82 „ Sukker 90 „ Fløde 42 „	882	90	43	2,00 blakning.		131 kl. 12 1/2 em.

Forsøg XI. P. K. P., 19 aar.

Døgn.	Kgr. legemsvægt.	Kost.		Kalorier.	Gr. kulhydrater.	Gr. fedt	Urinen. Mgr. aceton i 100 ccm.	Urinen. Mgr. aceton Totalmængde.	Ccm. urinmængde
1	65,5	Beaf	279 gr.	2665	47	197	2,13 bundfald.	35,31	1659
		Kalvesteg	204 „						
		Skinke	52 „						
		Salt kjød	60 „						
		Æg	179 „						
		Smør	190 „						
		Brød	90 „						
2	64,0	Beaf	396 gr.	3154	80	240	2,01 blakning.	29,91	1488
		Kalvesteg	74 „						
		Skinke	80 „						
		Æg	144 „						
		Smør	237 „						
		Brød	150 „						
		Fløde	30 „						
3	64,4	Beaf	266 gr.	3260	161	224	3.32 bundfald.	36,52	1100
		Kalvesteg	52 „						
		Skinke	70 „						
		Æg	173 „						
		Smør	204 „						
		Brød	300 „						
		Fløde	80 „						
4	64,5				Urin 7 dage senere		0,61	ingen blakning.	

Forsøg XII. R. L., 23 aar.

Døgn.	Kgr. legemsvægt.	Kost.	Kalorier.	Gr. kulhydrater.	Gr. fedt.	Urinen. Mgr. aceton i 100 ccm.	Urinen. Mgr. aceton Total-mængde.	Urinen. Ccm. urinmængde
1	68,5	Beaf . . . . . 452 gr. Kalvesteg . . . . . 90 „ Skinke . . . . . 14 „ Æg . . . . . 79 „ Fløde . . . . . 56 „ Sukker . . . . . 15 „	888	17	32	2,07 svag blakning.	26,91	1300
2	67,4	Beaf . . . . . 365 gr. Kalvesteg . . . . . 95 „ Salt kjød . . . . . 15 „ Æg . . . . . 125 „ Fløde . . . . . 64 „ Sukker . . . . . 30 „	961	33	37	3,69 blakning.	47,97	1196
3	6,6	Beaf . . . . . 332 gr. Kalvesteg . . . . . 84 „ Æg . . . . . 82 „ Fløde . . . . . 75 „ Sukker . . . . . 30 „ Brød . . . . . 150 „	1215	112	34	2,16 svag blakning.	25,83	1126
4	67	Beaf . . . . . 467 gr. Æg . . . . . 174 „ Fløde . . . . . 81 „ Sukker . . . . . 30 „ Brød . . . . . 150 „	1441	112	48	2,14 svag blakning.	20,39	953
5	67	Beaf . . . . . 439 gr. Kalvesteg . . . . . 67 „ Æg . . . . . 133 „ Fløde . . . . . 92 „ Sukker . . . . . 30 „ Brød . . . . . 300 „	1684	164	46	1,24 svag blakning.	14,14	1140
6	67,2			Urin 4 dage senere		0,26	ingen blakning.	

(Til *Forsøg X*).

Kjød- og fedtkost med tillæg af stigende mængder kulhydrater. Det kaloriske behov gjennemsnitlig dækket, ikkedestomindre vægttab. Acetonurien, som i de første dage er stærk, begynder først at aftage, idet kostens kulhydratgehalt er naaet 90 gr. og svinder næsten ganske ved 150 gr.

(Til *Forsøg XI*).

Kjød- og fedtkost med stor fedtgehalt. Dertil kulhydrater i stigende mængder fra 50 til 160 gr. Det kaloriske behov mere end dækket. Ikkedestomindre vægttab første dag. Acetonurien svag, svandt ikke selv ved 160 gr. kulhydrater i kosten.

(Til *Forsøg XII*).

Kjødkost med tillæg af stigende mængder kulhydrater. Underernæring, vægttab. Acetonurien svag, synes først at svinde idet kostens kulhydratgehalt er naaet op imod 150 gr.

Vi ser af disse forsøg, *at der som bestanddel af kosten kræves en ganske betydelig mængde kulhydrater for at undertrykke en af kjød- eller fedtkost fremkaldt acetonuri.* Ved en kost, der ikke indeholder overvættes meget fedt (forsøg X og XII), synes acetonurien hos en sund voxen mand at svinde, naar kulhydraternes mængde nærmer sig 150 gr. Ved en meget fedtholdig kost synes der at skulle endnu mere til.

Hirschfeld[28]) sætter den mængde kulhydrater, som skal til for at fjerne en acetonuri, blot til 50—100 gr. Det maa imidlertid bemærkes, at denne mængde i hans forsøg vistnok har bragt acetonurien til at synke meget stærkt (indtil ca. 40 mgr. pr. døgn), men ikke til fuldstændig at svinde.

Forsøg XIII. J. C. B.

Døgn.	Kgr. legemsvægt.	Kost.	Kalorier.	Gr. kulhydrater.	Gr. N.	Urinen. Gr. N.	Mgr. aceton i 100 ccm.	Mgr. aceton Total-mængde.	Ccm. urinmængde
1	60,12	Brød . . . . 300 gr.	730	157	3,07	10,68	0,74	7,20	973
2	59,50	— . . . . 300 „	—		3,07	10,39	2,90	24,65	850
							blakning.		
3	59,20	— . . . . 600 „	1460	314	6,14	10,20	1,06	9,11	860
							spor af blakning.		
4	59,20								

Vægttab 920 gr.
— Kjødtab 559 „
361

Sum: 12,28

31,27
— 12,28
18,99 = 559 gr. kjød.

Forsøg XIV. L. E. G., 22 aar.

Døgn.	Kgr. legemsvægt.	Kost.	Kalorier.	Gr. kulhydrater.	Gr. N.	Urinen. Gr. N.	Mgr. aceton i 100 ccm.	Mgr. aceton Total-mængde.	Ccm. urinmængde
1	65,70	Brød . . . . 450 gr.	1095	236	4,61	7,58	1,33	5,19	390
							svag blakning.		
2	65,60	— . . . . 450 „	—	—	4,61	8,60	1,62	8,26	510
							svag blakning.		
3	65,05	— . . . . 450 „	—	—	4,61	7,40	1,92	8,22	428
							svag blakning.		
4	64,85								

Vægttab 850 gr.
— Kjødtab 287 „
563

Sum: 13,83

23,58
— 13,83
9,75 = 287 gr. kjød.

(Til *Forsøg XIII* og *XIV*).

I forsøg XIII indtræder der acetonuri ved brødkost med en gehalt af kulhydrater paa ca. 150 gr. Ved fordobling af denne mængde svinder acetonurien.

I forsøg XIV, hvor kulhydraternes mængde udgjorde omtrent 240 gr., indtræder ingen acetonuri. I begge forsøg fandt en betydelig underernæring sted med paafølgende utvilsomt tab af æggehvide og fedt.

Disse forsøg viser, at der ogsaa, naar kosten indeholder lidet æggehvide og fedt, skal en betydelig mængde kulhydrater (mellem 150 og 200 gr.) til for at der ikke skal opstaa acetonuri.

Foruden en bekræftelse af den erfaring, at der aldrig hos sunde mennesker opstaar acetonuri, naar næringen indeholder en vis mængde kulhydrater, har mine forsøg som væsentlig nyt bidrag til læren om den alimentære acetonuri bragt det resultat, at denne antager større eller mindre dimensioner, alt efter næringens gehalt paa fedt.

Det synes altsaa, som om der er flere faktorer, der er bestemmende for den alimentære acetonuris optræden og grad, ialfald to, nemlig omsætningen af fedt og af kulhydrater i organismen. Ud fra denne antagelse lader i virkeligheden alle foreliggende data vedrørende den alimentære acetonuri sig ogsaa forklare.

Det synes mig overveiende sandsynligt, at acetonurien ved absolut hunger skyldes de samme aarsager som den alimentære acetonuri, manglende omsætning af kulhydrater og en betydelig omsætning af fedt, i dette tilfælde legemsfedt. Isaafald er det let at forstaa, at hungeracetonurien naar en saa høi grad — efter *Fr. Müller*[22]) indtil 0,5 gr. pr. døgn —, medens acetonurien ved en ren æggehvidenæring er svag og yderligere aftager med mængden af den omsatte æggehvide. Paa den ene side forbruges nemlig ved ren æggehvidenæring mindre legemsfedt end i absolut hunger, og paa den anden side gir en æggehvideholdig næring anledning til dannelse af betydelige mængder kulhydrater i organismen. Æggehviden i næringen virker derfor paa samme maade som kulhydraterne, kun i svagere grad (cfr. *Hirschfeld*[28]).

Mindre let forstaaeligt er det, at der ved blandet æggehvide- og fedtkost udskilles mere aceton end ved ren æggehvidekost. Er den omsatte mængde æggehvide i begge tilfælde den samme, saa synes det givet, at fedtomsætningen ogsaa i begge tilfælde antager samme omfang, kun at der i det ene tilfælde omsættes legemsfedt, i det andet næringsfedt. Imidlertid synes et saadant vikarierende forhold mellem legemets og næringens fedt i mine forsøg ikke at have fundet sted. De store mængder fedt i næringen har, ialfald ikke i de første forsøgsdage, formaaet at hindre et betydeligt vægttab, hvilket for en stor del har været betinget i et tab af legemsfedt. Den samlede fedtomsætning synes i virkeligheden at have været betydelig større selv ved overernæring med blandet kjød- og fedtkost end ved ren kjødkost.

Vi ser altsaa, at de foreliggende erfaringer om den alimentære acetonuri lader sig forklare ud fra forudsætningen om to antagonistisk virkende aarsagsmomenter, fedt- og kulhydratomsætning.

Et andet spørgsmaal er, hvorvidt enhver acetonuri kan forklares paa samme maade, f. ex. acetonurien ved forskjellige former af diabetes, ved læsioner af nervesystemet osv.

Trykt den 26de November 1896.

Med andre ord: er ogsaa de forskjellige pathologiske former af acetonuri alimentære acetonurier. En indgaaende diskussion af dette spørgsmaal synes mig paa basis af det sparsomme i litteraturen foreliggende materiale ikke mulig. Det tør iøvrigt neppe være tvilsomt, at aarsagen til en stor del pathologiske acetonurier er at søge i den ved sygdommene foraarsagede mangelfulde ernæring.

Med hensyn til arten og forløbet af de stofomsætninger, som sluttelig fører eller ikke fører til en acetonudskillelse, lader der sig ligessalidt af mine som af tidligere forsøg drage nogensomhelst slutninger. Af den omstændighed, at det aabenbart er flere faktorer, som bestemmer acetonuriens optræden og grad, synes at fremgaa, at disse stofomsætninger bestaar i komplicerede vexelvirkninger mellem forskjellige intermediære stofvexelprodukter. At acetonurien i visse tilfælde af- og tiltager med fedtomsætningen, kunde tyde paa, at acetonet er et spaltningsprodukt af fedt. Isaafald maatte kulhydraternes eiendommelig virkning nærmest tænkes at bestaa i en modificerende indflydelse paa fedtomsætningen, f. ex. deri, at der foregaar syntheser mellem omsætningsprodukter af fedt og kulhydrater, hvilke ved mangel paa kulhydrater i næringen helt eller delvis falder bort. Med en saadan antagelse stemmer det godt overens, at der skal en betydelig mængde kulhydrater til for at hindre en acetonuri.

Ligesaa sandsynligt er det imidlertid, at acetonet er et produkt af cellevirksomhed, til hvilket der — i lighed med glykogenet — ikke lader sig paavise nogen bestemt «modersubstans». Det er ikke vanskeligt at forstaa, at sammensætningen af de i legemet cirkulerende væsker ved ensidig kost undergaar forandringer, som igjen modificerer cellernes assimilations- og secretionsvirksomhed enten direkte eller indirekte gjennem paavirkning af nervesystemet.

Som afslutning paa dette arbeide finder jeg det naturligt i nogle korte sætninger at samle de resultater, som fremgaar af alle hidtil udførte forsøg over den alimentære acetonuri hos mennesker:

1. Acetonuri opstaar, naar der i næringen ikke tilføres tilstrækkelig kulhydrater. Naar saadanne omsættes i organismen, har de en eiendommelig evne til at hindre, at der opstaar acetonuri, eller at undertrykke en allerede bestaaende acetonuri.

   Næringen maa indeholde betydelige mængder kulhydrater (100—200 gr.) for at der ikke skal opstaa acetonuri.

2. Ved ren æggehvidenæring opstaar der svag acetonuri, som yderligere aftager med stigende mængde af æggehvide i næringen. Ved absolut hunger, ren fedtnæring eller blandet æggehvide- og fedtnæring med stor fedtgehalt opstaar en betydelig acetonuri. Omsætning af fedt i legemet synes at være den væsentligste aarsag til en acetonuri, og i betragtning af, at der ved absolut hunger opstaar høigradig acetonuri, synes omsætningen af legemsfedt og fedt i næringen i denne henseende at forholde sig ens.

   Hvis de ved mine dyreforsøg vundne resultater tør overføres paa mennesker, saa kan dertil endnu føies:

3. Organismen har til en vis grad evnen til at omsætte aceton. Dog er denne evne ikke tilstrækkelig effektiv til at hindre acetonuri, naar der i de cirkulerende væsker findes mere end de normale spor af aceton — antagelig et par milligram i 100 ccm. — En acetonuri synes derfor ikke at skyldes en svigten af denne evne, men en forøget dannelse af aceton.

Det arbeide, hvis resultater her er meddelte, er udført efter opfordring af hr. professor dr. med. *S. Torup.* For den interesse og understøttelse, som han i alle maader har ladet det blive til del, beder jeg ham modtage min erkjendtligste tak. Ligeledes udtaler jeg min tak til hr. cand. med. *I. Bang,* hvis arbeide som assistent ved det fysiologiske institut i stor udstrækning er kommen mine undersøgelser tilgode, og til de herrer medicinske studerende, der har stillet sig til disposition som forsøgsindivider. Deres navne er: *J. Aas, I. Chr. Bisgaard, L. E. Green, M. Haaland, N. Heitmann, A. D. Horn, J. Kahrs, R. Lundevall, A. Magne-Rønnevik, H. Pedersen, P. K. Pedersen, H. Sandberg, O. Scheel.*

Literatur*).

1. *Petters:* Untersuchungen über die Honigharnruhr. Prager Vierteljahrssrhrift. 1857. XIV. 3. Bd. S. 81.
2. *Kaulich:* Ueber Acetonbildung im thierischen Organismus Prager Vierteljahrsschrift. 1860. XVII. 3. Bd. S. 58.
3. *Gerhardt:* Diabetes mellitus und Aceton. Wiener med. Presse. 1868 Bd. VI. No. 28.
4. *Deichmüller*: Ueber diabetische Acetonurie. *Liebig's* Annalen der Chemie. Bd. 209. S. 22.
5. *Tollens*: Ueber Eisenchlorid roth färbende Harne. *Liebig's* Annaleu. Bd. 209. S. 30.
6. *v. Jaksch*: Ueber Acetonurie und Diaceturie. Berlin. 1885.
7. *Kussmaul*: Zur Lehre vom Diabetes mellitus. Deutsches Archiv f. klin. Medicin. XIV. I. 1874.
8. *Rupstein*: Ueber das Auftreten des Acetons bei Diabetes mellitus. Centralbl. für die medic. Wissenschaften. 1874. No. 55.
9. *Quincke*: Ueber Coma diabeticum. Berliner klin. Wochenschrift. 1880. No. 1.
10. *v. Buhl:* Ueber diabetisches Coma. Zeitschrift für Biologie. XVI. S. 413. 1880.
11. *Ebstein*: Weiteres über Diabetes mellitus. Deutsches Arch. f. klin. Med. XXX. S. 1. 1881.
12. *Jaenicke*: Beiträge zur sogenannten Acetonurie bei Diabetes mellitus. Deutsches Arch. f. klin. Med. XXX. S. 108. 1881.
13. *Litten:* Ueber einen eigenartigen Symptomencomplex in Folge von Selbstinfection bei dyspeptischen Zuständen (Coma dyspepticum). Zeitschr. f. klin. Med. VII. Supplem.-Heft. S. 82. 1884.

*) De løbende nummere i denne fortegnelse refererer sig til de i texten ved vedkommende forfatternavne anførte tal.

14. *v. Engel*: Ueber die Mengenverhältnisse des Acetons unter physiologischen und pathologischen Verhältnissen. Zeitschr. f. klin. Med. XX. S. 514. 1892.

15. *Lorentz*: Untersuchungen über Acetonurie mit besonderer Berücksichtigung ihres Auftretens des Digestionsstöruugen. Zeitschrift f. klin. Med. XIX. S. 19. 1891.

16. *G. Hoppe-Seyler*: Ueber das Auftreten acetonbildender Substanz im Urin nach Schwefelsäurevergiftung. Zeitschr. f. klin. Med. VI. S. 478. 1883.

17. *Tuczeck:* Schwere Antipyrinvergiftung bei einem Kinde. Berliner klin. Wochenschr. 1883. No. 17.

18. *Senator*: Ueber Selbstinfection etc. Zeitschr. f. klin. Med. VII. S. 258. 1884.

19. *Pawinski*: Ueber acetonasthma. Berliner klin. Wochenschr. 1888. No. 50.

20. *Stumpf*: Ueber puerperale Eclampsie. Verhandl. d. d. Gesellschaft f. Gynäcologie. I. Congr. 1886. S. 169.

21. *Baginski*: Ueber Acetonurie bei Kindern. Arch. f. Kinderheilkunde. IX. S. 1. 1888.

22. *Fr. Müller*: *Senator's* Bericht über die Ergebnisse des an *Cetti* ausgeführten Hungerversuches. Berliner klin. Wochenschr. 1887. S. 428.

23. *Fr. Müller*: Stoffwechseluntersuchungen bei Krebskranken. Zeitshr. f. klin. Med. XVI. S. 503. 1889.

24. *Tuczeck*: Stoffwechsel bei abstinirenden Geisteskranken. Arch. f. Psychiatrie. XV. S. 784. 1884.

25. *Ephraim:* Zur physiologischen Acetonurie. Dissertation. Breslau 1885.

26. *Honigmann*: Zur Entstehung des Acetons. Diss. Breslau 1886.

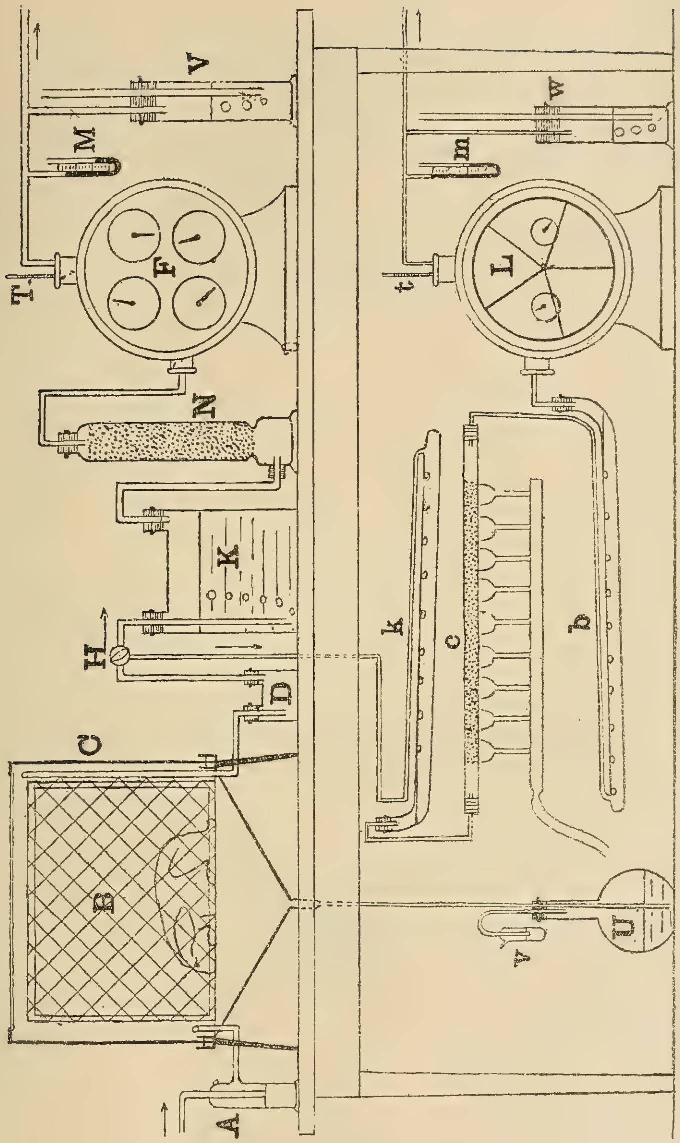
27. *Friedländer*: Beiträge zur Acetonurie. Diss. Breslau 1886.

28. *Hirschfeld*: Beobachtungen über die Acetonurie und ihre Behandlung. Zeitschr. f. klin. Med. XXVIII. S. 176. 1895.

29. *Rosenfeld*: Ueber die Entstehung des Acetons. Deutsche med. Wochenschr. 1885. No. 40.
Rosenfeld: Beiträge zur Pathologie und Therapie des Diabetes mellitus. Diss. Breslau 1885.

30. *Rosenfeld*: Grundgesetze der Acetonurie und ihre Behandlung. Centralbl. f. innere Medicin. 1895. No. 51.
31. *Minkowski*: Untersuchungen über den Diabetes mellitus nach Exstirpation des Pancreas. Arch. f. experim. Pathologie und Pharmacologie. XXXI. S. 181.
32. *v. Mering:* Ueber Diabetes mellitus. Zeitschr. f. klin. Med. XVI. S. 442. 1889.
33. *Lustig*: Sugli effeti del estirpatione del plesso celiaco. Arch. per le scienze mediche. XIII. No. 6.
Lustig: Ulteriori recerche sperimentale sulle funzioni del plesso celiaco. Arch. per le scienze med. XIV. No. 1.
34. *Oddi*: Sull acetonuria et glicosuria sperimentale. Lo sperimentale. XLV. S. 485.
De italienske arbeider citerede efter *Virchow-Hirsch*: Jahresberichte der gesammten Medicin 1889 til 1892.
35. *Peiper*: Experimentelle Studien über die Folgen der Ausrottung des Plexus coeliacus. Zeitschr. f. klin. Med. XVII. S. 498. 1890.
36. *Külz*: Beiträge zur Kentniss der β-Oxybuttersäure. Zeitschr. f. Biologie. XXIII. S. 329.
37. *v. Noorden*: Lehrbuch der Pathologie des Stoffwechels. Berlin 1893.
38. *Weintraud:* Ueber die Ausscheidung von Aceton, Diacetsäure und β-Oxybuttersäure beim Diabetes mellitus. Arch. f. experim. Path. und Pharm. XXXIV. S. 169.
39. *Külz*: Ueber eine neue linksdrehende Säure. Zeitschr. f. Biologie. XX. S. 165.
40. Se 36.
41. *Minkowski*: Ueber das Vorkommen von Oxybuttersäure in Harn bei Diabetes mellitus. Arch. f. experim. Path. und Pharm. XVIII. S. 35 og 147.
42. *Wolpe*: Untersuchungen über die Oxybuttersäure des diabetischen Harns. Arch. f. experim. Path. und Pharm. XXI. S. 138.
43. *Liebig's* Annalen. 149, 205.
44. Zeitschr. f. analyt. Chemie. XXIX. S. 362.
45. *Devoto*: Note di chimia clinica. Rivista med. 1891. Citeret efter *Virchow-Hirsch*: Jahresberichte der gesammten Medicin. 1891. I. S. 310.

46. *Claude Bernard's* Vorlesungen über Diabetes. Deutsch herausgegeben von dr. *Carl Posner.* Berlin 1878. S. 150.
47. *Albertoni*: Die Wirkung und Verwandlung einiger Stoffe im Organismus. Arch. f. experim. Path. und Pharm. XVIII. S. 236.
48. *Araki*: Beiträge zur Kentniss der β-Oxybuttersäure und ihres Verhaltens im Organismus. Zeitschrift für physiol. Chemie. XVIII. S. 1.
49. *Schmelck*: Beretning om chemiske analyser udførte for sundhedskommissionen i 1892. V. S. 7.
50. *Rubner*: Calorimetrische Untersuchungen. Zeitschr. f. Biologie. XXI. S. 377 og 382.
51. *Woltering*: Diätetisches Handbuch. Bd. I. S. 174.
52. *Voit*: Handbuch der Physiologie des Gesammtstoffwechsels. 1881. S. 63.


A
B
C
D
H
K
N
F
T
M
V
k
c
b
L
t
m
w
U
v

SUR L'APPLICATION DE LA THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS COMPLEXES A LA SOLUTION EN NOMBRES RATIONNELS $x_1\ x_2 \ldots x_n\ c_1\ c_2 \ldots c_n,\ k$ DE L'ÉQUATION:

$$c_1 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x_1 + c_2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x_2 + \ldots + c_n \operatorname{arc} \operatorname{tg} x_n = k\frac{\pi}{4}$$

PAR

CARL STØRMER

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

KRISTIANIA

ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1896.

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. B. XIX. Nr. 3.

Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels $x_1 x_2 \dots x_n c_1 c_2 \dots c_n, k$ de l'équation:

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} x_1 + c_2 \operatorname{arc\,tg} x_2 + \dots + c_n \operatorname{arc\,tg} x_n = \mathrm{k}\frac{\pi}{4}$$

§ I.

Notions préliminaires. Théorie des nombres entiers complexes.

Le présent mémoire contient un résumé de quelques recherches auxquelles j'ai été conduit en essayant de résoudre un problème posé par M. Gravé à St. Petersbourg dans le recueil français *L'Intermédiaire des Mathématiciens.* (Voir T. II p. 228).

Le problème, déjà posé par Euler, est le suivant:

Peut-on trouver d'autres solutions en nombres entiers x, y, m, n, k de l'équation:

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{4}$$

que celles déjà connues:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4} \quad (\text{Euler})$$

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4} \quad (\text{Euler, Vega})$$

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4} \quad (\text{Machin})$$

Dans mes recherches, je me suis servi de la théorie des nombres entiers complexes de la forme $a+ib$, a et b étant des entiers. Cette théorie jouant ainsi un rôle fondamental dans ce mémoire, il faut d'abord en rappeler les traits fondamentaux.*)

On appelle *nombre entier complexe* un nombre ω de la forme $a+ib$, a et b étant des nombres entiers (ou $=0$) et i l'unité imaginaire ($\sqrt{-1}$).

Le nombre $\omega' = a - ib$ est dit *nombre conjugué* à $\omega = a+ib$.

On appelle *norme* d'un nombre complexe $\omega = a+ib$ l'expression

$$N(\omega) = \omega\,.\,\omega' = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2.$$

La norme est toujours un nombre entier positif.

La somme, la différence et le produit de deux nombres entiers complexes est aussi un nombre entier complexe.

---

*) Voir: Gauss Werke II: *Theoria residuorum biquadraticorum.* Les présentes propositions sont tirées de Lejeune-Dirichlet: *Vorlesungen über Zahlentheorie,* herausgegeben von Dedekind, Braunschweig 1894, § 159.

Si α et β sont des nombres entiers complexes, on a

$$(\alpha \pm \beta)' = \alpha' \pm \beta'$$
$$(\alpha . \beta) = \alpha' . \beta'$$
$$N(\alpha . \beta) = N(\alpha) . N(\beta)$$

On dit *que* α *est divisible par* β, si l'on a

$$\alpha = \gamma . \beta$$

γ étant aussi un nombre entier complexe; α est alors appelé *multiple* de β et β *diviseur de* α.

On a les théorèmes suivants:

Si α *et* β *sont divisibles par* γ, $\alpha + \beta$, $\alpha - \beta$ *et* $\alpha . \beta$ *le seront aussi.*

Si α *est divisible par* β *et* β *divisible par* γ, α *sera divisible par* γ, d'où:

Si α *est divisible par* β, $N(\alpha)$ *sera divisible par* $N(\beta)$.

D'un autre coté, α n'est pas toujours divisible par β, alors que $N(\alpha)$ est divisible par $N(\beta)$. *)

On appelle *unité complexe* un nombre entier complexe qui est diviseur de 1. On a les quatre unités

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i.$$

Si $\omega = a + ib$ est un nombre entier complexe, les quatre nombres

$$\omega = a + ib$$
$$-\omega = -a - ib$$
$$i\omega = ia - b$$
$$-i\omega = -ia + b$$

sont appellés *des nombres associés.*

Ces nombres se présentent de la même manière dans toutes les questions de divisibilité. En effet, si α est divisible par ω, il sera aussi divisible par $-\omega$, $i\omega$, $-i\omega$.

*) voir p. 8.

Par un procédé tout-à-fait analogue à celui des nombres naturels on peut trouver *les diviseurs communs* à deux nombres entiers complexes α et β, et la théorie de divisibilité des nombres entiers complexes est donc parfaitement analogue à celle des nombres naturels.

α et β sont dits *premiers entre eux,* s'ils n'ont que des unités pour diviseurs communs.

On a les théorèmes:

chacun des nombres $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *étant premiers à chacun des nombres* $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m$, *les produits* $\alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *et* $\beta_1 . \beta_2 \ldots \beta_m$ *sont premiers entre eux.*

Si α *et* β *sont premiers entre eux et* $\beta\omega$ *divisible par* α, α *divisera* ω.

Si ω *est un multiple commun aux deux nombres* α *et* β, *premiers entre eux,* ω *sera divisible par leur produit* $\alpha . \beta$.

Un nombre entier complexe ρ qui n'est pas une unité est appelé *un nombre premier complexe,* s'il n'a pour diviseurs que des unités ou ses propres associés.

Tous les nombres premiers complexes appartiennent aux catégories suivantes:

1) $1 + i$ *et ses associés* $-1 - i$, $1 - i$, $-1 + i$.

Il y a lieu de remarquer que

$$(1 + i)^2 = 2i, \qquad (1 + i)^4 = -4.$$

2) *Les nombres premiers réels* p *de la forme* $4h + 3$ *et leurs associés,* $-p$, ip *et* $-ip$.

3) *Les nombres premiers complexes des formes* $u + iv$ *et* $u - iv$ *et leurs associés,* $u^2 + v^2$ *étant un nombre premier réel de la forme* $4h + 1$. Tout nombre premier réel de cette forme étant décomposable d'une seule manière en une somme $u^2 + v^2$,*) il donne lieu à deux nombres complexes conjugués

*) Voir p. ex. *Legendre: Theorie des nombres* I, 2, § 3.

et non associés des formes ci-dessus et à leurs associés respectifs.

Par exemple, les nombres premiers réels

$$5 = 2^2 + 1, \quad 13 = 3^2 + 2^2, \quad 17 = 4^2 + 1, \quad 29 = 5^2 + 2^2 \ldots$$

donnent les deux séries de nombres premiers complexes

$$\begin{array}{lllll} 2+i & 3+2i & 4+i & 5+2i & \ldots \\ 2-i & 3-2i & 4-i & 5-2i & \ldots \end{array}$$

et leurs associés.

On a maintenant les théorèmes fondamentaux:

Si le produit de plusieurs nombres entiers complexes $\alpha_1\,\beta_1\ldots$ *est divisible par un nombre premier complexe* ρ, *l'un des nombres* $\alpha_1\,\beta_1\ldots$ *sera divisible par* ρ.

Tout nombre entier complexe peut être décomposé en un produit d'un nombre fini des nombres premiers complexes et, aux diviseurs ± 1, $\pm i$ *près, cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.*

Tels sont les principes fondamentaux de cette belle théorie créée par Gauss. Avec les notions nouvelles on manie ces nombres avec la même facilité que les nombres entiers naturels.

Dans ce qui suit je considérerai exclusivement des nombres complexes de la forme $a + ib$, où a et b sont *premiers entre eux*.

Ces nombres ne *contiennent pas de diviseurs réels;* en effet, un diviseur réel ρ serait commun à $a + ib$ et $a - ib$ et par conséquent commun à $2a$ et $2b$; et a et b étant premiers entre eux, il faudrait que le diviseur réel ρ fût $=2$; mais alors, $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$ serait divisible par $\rho^2=4$ et a et b seraient tous les deux impairs, d'où

$$a^2+b^2=(2a_1+1)^2+(2b_1+1)^2=4A+2.$$

Mais cette expression n'est jamais divisible par 4 et par conséquent $a+ib$ ne contient pas de diviseurs réels, *c. q. f. d.*

Tous les diviseurs de $a+ib$ sont donc de la forme $u+iv$, u et v étant premiers entre eux.

Quant à la décomposition d'un tel nombre $a+ib$ en ses diviseurs premiers, on peut assigner le procédé suivant:

Décomposons la norme a^2+b^2 en ses diviseurs premiers réels; on aura donc

$$a^2+b^2=2^{\delta}\,p_1^{\nu_1}\,p_2^{\nu_2}\cdots\,p_n^{\nu_n}$$

où $\delta=0$ ou $=1$, $p_1p_2\ldots p_n$ des nombres premiers réels de la forme $4h+1$ et $\nu_1\nu_2\ldots\nu_n$ des exposants positifs.

On décompose chaque nombre premier p en une somme de deux carrés, $p=u^2+v^2$. Alors, $a+ib$ est divisible par $(u+iv)^{\nu}$ ou par $(u-iv)^{\nu}$, si a^2+b^2 est divisible par p^{ν}. Pour décider quel cas se présente, on a les congruences:

$$a+ib\equiv 0 \quad (\text{mod. } u+iv)$$
$$u+iv\equiv 0 \quad (\text{mod. } u+iv)$$

d'où

$$va-ub\equiv 0 \quad (\text{mod. } u+iv)$$

et $va - ub$ étant réel, il sera divisible par $N(u + iv) = p$ et l'on a la règle:

$a + ib$ sera divisible par $u + iv$ ou par $u - iv$, suivant que $va - ub$ ou $va + ub$ sera divisible par p. *)

Considérons comme exemple la décomposition du nombre

$$\omega = 16947 + 11771\, i$$

Nous avons

$$N(\omega) = 16947^2 + 11771^2 = 138556441 + 287200809 =$$
$$= 425757250 = 2 \,.\, 5^3 .\, 97^2 .\, 181$$

et 2 étant $= 1 + 1$, $5 = 2^2 + 1$, $97 = 9^2 + 4^2$ et $181 = 10^2 + 9^2$, ω sera divisible par $1 \pm i$, $2 \pm i$, $9 \pm 4i$ et $10 \pm 9i$. Pour déterminer les signes, on remarque que $1 + i = i(1 - i)$ et que $1 \,.\, 16947 - 2 \,.\, 11771$, $4 \,.\, 16947 + 9 \,.\, 11771$ et $9 \,.\, 16947 + 10 \,.\, 11771$ sont divisibles respectivement par 5, 97 et 181.

Par conséquent

$$16947 + 11771 i = \varepsilon (1 - i)(2 + i)^3 .\, (9 - 4i)^2 .\, (10 - 9i)$$

où ε est une unité.

---

*) Dans cet énoncé, $va - ub$ et $va + ub$ peuvent être remplacés par $ua + vb$ et $ua - vb$.

Trykt den 3die November 1896.

§ 2.

Liaison étroite entre la théorie des nombres entiers complexes et les solutions entières $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$, $c_1 \dots c_n$, k de l'équation:

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{b_1}{a_1} + c_2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b_2}{a_2} + \dots + c_n \operatorname{arc\,tg} \frac{b_n}{a_n} = k\frac{\pi}{4}.$$

Il y a une liaison intime entre la théorie des nombres entiers complexes et les solutions entières $a_1 \dots a_n$, $b_1 \dots b_n$, $c_1 \dots c_n$, k de l'équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{b_1}{a_1} + c_2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b_2}{a_2} + \dots + c_n \operatorname{arc\,tg} \frac{b_n}{a_n} = k\frac{\pi}{4}. \qquad (1)$$

Cette liaison se déduit de la formule bien connue:

$$(1-i)^k . (a_1 + ib_1)^{c_1} . (a_2 + ib_2)^{c_2} . \dots (a_n + ib_n)^{c_n} =$$
$$= \varepsilon . \mathrm{R} . e^{i\left(c_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{b_1}{a_1} + c_2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b_2}{a_2} + \dots + c_n \operatorname{arc\,tg} \frac{b_n}{a_n} - k\frac{\pi}{4} + k_1 \frac{\pi}{2}\right)} \text{*)} \qquad (2)$$

R étant le module du premier mêmbre, $\varepsilon = \pm 1, \pm i$ et k_1 étant un nombre entier ou $= 0$.

En effet, on voit par cette formule, que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit satisfaite aux multiples de $\frac{\pi}{2}$ près, est que le produit

$$(1-i)^k (a_1 + ib_1)^{c_1} (a_2 + ib_2)^{c_2} \dots (a_n + ib_n)^{c_n}$$

soit réel ou purement imaginaire.

---

*) On la déduit en multipliant plusieurs équations de la forme

$$a + ib = re^{i\varphi} = \sqrt{a^2 + b^2} . e^{i \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}}$$

La recherche des solutions entières de l'équation (1) dépend alors exclusivement de l'étude de ce produit, et ce produit étant un nombre entier complexe, cette étude peut se faire tout naturellement à l'aide de la théorie de ces nombres.

Je me suis servi de cette méthode dans un travail: *Solution complète en nombres entiers* m, n, x, y, k *de l'équation* $m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$, *Christiania Videnskabsselskabs Skrifter 1895.* Après avoir fini ce travail, j'ai remarqué que GAUSS a déjà observé cette liaison entre les nombres entiers complexes et les arcs-tangentes.

En effet, dans une petite note (GAUSS Werke II p. 523) à la fin des œuvres complètes de GAUSS, M. SCHERING donne un court résumé de quelques calculs entrepris par ce grand géomètre et trouvés dans ses manuscrits. Ces calculs, sans développements ou démonstrations ultérieurs, montrent que GAUSS s'est servi des décompositions des nombres entiers complexes pour évaluer des arcs-tangentes simples par des séries rapidement convergentes. Dans ce but il a calculé ses tables des diviseurs (Voir l. c. p. 477) des nombres $1 + x^2$, $4 + x^2 \dots 81 + x^2$, où se trouvent une foule des décompositions en diviseurs premiers de pareils nombres.

D'ailleurs, il n'a pas étudié les équations de la forme (1) dans les cas généraux.

Nous reviendrons plus tard à la note de GAUSS.

§ 3.

Théorèmes généraux sur les solutions rationnelles $c_1 c_2 \ldots c_n$ $x_1 \ldots x_n$, k de l'équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} x_1 + c_2 \operatorname{arc\,tg} x_2 + \ldots + c_n \operatorname{arc\,tg} x_n = k\frac{\pi}{4}.$$

Nous allons appliquer les considérations précédentes aux solutions rationnelles $c_1 \ldots c_n$, $x_1 \ldots x_n$, k de l'équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} x_1 + c_2 \operatorname{arc\,tg} x_2 + \ldots + c_n \operatorname{arc\,tg} x_n = k\frac{\pi}{4}.$$

L'étude de cette équation se réduit évidemment au cas où $c_1 \ldots c_n$ et k sont des nombres entiers positifs ou $= 0$ et $x_1 x_2 \ldots x_n$ des fractions irréductibles ou des nombres entiers.

Nous allons démontrer le théorème général:

Théorème 1.

Pour que les nombres entiers $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_n$ satisfassent à l'équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{b_1}{a_1} + c_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{b_2}{a_2} + \ldots + c_n \operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{a_n} = k\frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

aux multiples de $\frac{\pi}{2}$ près, a_1 et b_1, a_2 et b_2 etc. étant respectivement premiers entre eux,) $c_1 \ldots c_n$ des nombres entiers positifs et $k = 0$ ou $k = 1$, il faut et il suffit que*

---

*) c'est-à-dire: n'ayant pas de diviseurs communs > 1.

$$a_1^2+b_1^2=2^{\delta_1}\cdot p_1^{|\alpha_1|}\dots p_m^{|\nu_1|}\dots p_s^{|\rho_1|}=2^{\delta_1}\cdot\prod p_m^{|\nu_1|}$$

$$a_2^2+b_2^2=2^{\delta_2}\cdot p_1^{|\alpha_2|}\dots p_m^{|\nu_2|}\dots p_s^{|\rho_2|}=2^{\delta_1}\cdot\prod p_m^{|\nu_2|}$$

. . . .

$$a_n^2+b_n^2=2^{\delta_n}\cdot p_1^{|\alpha_n|}\dots p_m^{|\nu_n|}\dots p_s^{|\rho_n|}=2^{\delta_n}\cdot\prod p_m^{|\nu_n|}$$

où $\delta_1\delta_2\dots\delta_n$ *sont* $=0$ *ou* $=1$ *de telle manière que*

$$c_1\delta_1+c_2\delta_2+\dots+c_n\delta_n+k$$

soit pair. $p_1\ \dots\ p_m\ \dots\ p_s$ *sont des nombres premiers différents entre eux et tous de la forme* $4h+1$. *Enfin* $\nu_1\nu_2\dots\nu_n$ *sont des nombres entiers positifs, négatifs ou* $=0$, *assujettis à la relation*

$$c_1\nu_1+c_2\nu_2+\dots+c_n\nu_n=0,$$

$|\nu|$ *désigne comme d'ordinaire la valeur absolue de* ν

— *et que* $a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda$ *n'étant divisible par le nombre premier* p_m *que si le produit correspondant* $\nu_\lambda\cdot\nu_\mu$ *est positif, l'un des exposants* $|\nu_\lambda|$ *et* $|\nu_\mu|$ *étant* >0.

Pour démontrer ce théorème, rappelons nous que la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) soit satisfaite, aux multiples de $\frac{\pi}{2}$ près, est que le produit

$$P=(1-i)^k(a_1+ib_1)^{c_1}(a_2+ib_2)^{c_2}\dots(a_n+ib_n)^{c_n}$$

soit réel ou purement imaginaire.

Posons d'abord

$$a_1 + ib_1 = (1 - i)^{\delta_1} (\alpha_1 + \beta_1)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_\lambda + ib_\lambda = (1 - i)^{\delta_\lambda} (\alpha_\lambda + i\beta_\lambda)$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$a_n + ib_n = (1 - i)^{\delta_n} (\alpha_n + i\beta_n)$$

δ_λ étant $= 0$ si $a_\lambda^2 + b_\lambda^2$ est impair et $= 1$, si $a_\lambda^2 + b_\lambda^2$ est pair. a_λ et b_λ étant premiers entre eux, $a_\lambda^2 + b_\lambda^2$ n'est jamais divisible par 4 et par conséquent $\alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ n'est jamais divisible par $1 - i$, et $\alpha_\lambda^2 + \beta_\lambda^2$ sera impair.

Le diviseur commun avec norme maximum des nombres $\alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ et $\alpha_\lambda - i\beta_\lambda$ étant aussi diviseur commun à $\alpha_\lambda^2 + \beta_\lambda^2$, $2\alpha_\lambda$ et $2\beta_\lambda$, il faut que ce diviseur soit une unité, c'est-à-dire *que les nombres* $\alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ *et* $\alpha_\lambda - \beta_\lambda$ *soient premiers entre eux.*

Aucune puissancé $(\alpha_\lambda + i\beta_\lambda)^c$ ne contient de diviseurs premiers réels, parcequ' un tel diviseur serait commun à $\alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ et $\alpha_\lambda - i\beta_\lambda$, qui sont premiers entre eux.

En substituant ces valeurs, on aura:

$$P = (1 - i)^{\delta + k} (\alpha_1 + i\beta_1)^{c_1} (\alpha_2 + i\beta_2)^{c_2} \ldots (\alpha_n + i\beta_n)^{c_n}$$

où

$$\delta = c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + \ldots + c_n\delta_n$$

et, P étant réel ou purement imaginaire et $\alpha_1 + i\beta_1 \ldots \alpha_n + i\beta_n$ n'étant pas divisibles pas $1 - i$, *il faut d'abord que* $\delta + k$ *soit pair.*

De plus, il faut que tous les diviseurs premiers complexes contenus dans P soient conjugués deux à deux.

Soient

$$p_1\, p_2 \cdots p_m \cdots p_s$$

tous les nombres premiers réels qui divisent

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2, \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2, \quad \ldots, \quad \alpha_n^2 + \beta_n^2$$

Comme on le sait,*) chacun de ces nombres premiers p_m est un produit de deux nombres premiers complexes $u_m + iv_m$ et $u_m - iv_m$ et a la forme $4h + 1$. Par conséquent, les seuls nombres premiers autres que $1 - i$ qui divisent P sont

$$u_1 + iv_1\,, \quad u_2 + iv_2\,, \quad \ldots, \quad u_m + iv_m\,, \quad \ldots, \quad u_s + iv_s$$

$$u_1 - iv_1\,, \quad u_2 - iv_2\,, \quad \ldots, \quad u_m - iv_m\,, \quad \ldots, \quad u_s - iv_s$$

abstraction faite des nombres associés à ceux ci.

Mettons en évidence les diviseurs $u_m + iv_m$ et $u_m - iv_m$ et posons

$$\alpha_1 + i\beta_1 = (u_m \pm iv_m)^{|\nu_1|} \,.\, t_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha_\lambda + i\beta_\lambda = (u_m \pm iv_m)^{|\nu_\lambda|} \,.\, t_\lambda$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\alpha_n + i\beta_n = (u_m \pm iv_m)^{|\nu_n|} \,.\, t_n$$

où ν_λ *est un nombre entier positif, si* $\alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ *est divisible par* $u_m + iv_m$, *un entier négatif, si* $\alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ *est divisible par* $u_m - iv_m$ *et* $= 0$, *si* $\alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ *n'est divisible ni par* $u_m + iv_m$,

*) Voir p. 6.

ni par $u_m - iv_m$, ou, en d'autres termes si l'exposant $|\nu_\lambda|$ de p_m dans l'expression de $\alpha_\lambda^2 + \beta_\lambda^2$ est $= 0$.

$\alpha_\lambda + i\beta_\lambda$ ne contenant pas un diviseur réel $(u_m^2 + v_m^2) = (u_m + iv_m)(u_m - iv_m)$, cette détermination est toujours admissible. $t_1\, t_2 \ldots t_n$ sont des nombres entiers complexes qui ne sont divisibles ni par $u_m + iv_m$, ni par $u_m - iv_m$, et $|\nu|$ désigne la valeur absolue de ν.

Pour que P soit réel ou purement imaginaire, il faut évidemment que la somme des exposants $c_\lambda |\nu_\lambda|$ des diviseurs $u_m + iv_m$ qui le divisent soit égale à la somme des exposants des diviseurs $u_m - iv_m$. En se rappelant que les ν dans la première somme sont tous positifs et ceux de la seconde tous négatifs, cette condition peut s'écrire

$$\sum c_\lambda \nu_\lambda = 0$$

la somme étant étendue à tous les ν qui sont $\gtrless 0$. En ajoutant ici les termes $c\nu$ restants, qui sont tous $= 0$, et en disposant convenablement les termes, on aura

$$c_1 \nu_1 + c_2 \nu_2 + \ldots + c_n \nu_n = 0$$

On obtient de cette manière:

$$a_\lambda + ib_\lambda = (1 - i)^{\delta_\lambda} \cdot (\alpha_\lambda + i\beta_\lambda) =$$

$$= \varepsilon_\lambda \cdot (1 - i)^{\delta_\lambda} \cdot (u_1 \pm iv_1)^{|\alpha_\lambda|} \ldots (u_m \pm iv_m)^{|\nu_\lambda|} \ldots (u_s \pm iv_s)^{|\rho_\lambda|}$$

où ε_λ est une unité et $\alpha_\lambda \ldots \rho_\lambda$ sont des nombres entiers ou $= 0$ analogues aux ν_λ. En prenant les normes, on en tire

$$a_\lambda^2 + b_\lambda^2 = 2^{\delta_\lambda} \cdot p_1^{|\alpha_\lambda|} \ldots p_m^{|\nu_\lambda|} \ldots p_s^{|\rho_\lambda|} = 2^{\delta_\lambda} \cdot \prod p_m^{|\nu_\lambda|}$$

ce qui est l'expression cherchée.

D'un autre côté, l'un des exposants $|\nu_\lambda|$ et $|\nu_\mu|$ étant > 0, $a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda = (a_\lambda + ib_\lambda) b_\mu - (a_\mu + ib_\mu) b_\lambda$ ne sera divisible par $u_m \pm iv_m$ que si $a_\lambda + ib_\lambda$ et $a_\mu + ib_\mu$ sont tous les deux divisibles par ce nombre, c'est à dire que, *si le produit* $\nu_\lambda \nu_\mu$ *est positif*, et $a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda$ étant réel il ne sera divisible par p_m, qu' à la même condition, *c. q. f. d.*

Les conditions indiquées sont donc nécessaires.

Nous allons démontrer qu'elles sont aussi suffisantes.

Soit en effet

$$a_\lambda{}^2 + b_\lambda{}^2 = 2^{\delta_\lambda} . p_1{}^{|\alpha_\lambda|} \ldots p_m{}^{|\nu_\lambda|} \ldots p_s{}^{|\rho_\lambda|}$$

avec les mêmes significations que dans l'énoncé du théorème. D'après ce qui précède, cette équation peut s'écrire:

$$(a_\lambda + ib_\lambda)(a_\lambda - ib_\lambda) =$$

$$= (1 + i)^{\delta_\lambda} . (u_1 + iv_1)^{|\alpha_\lambda|} \ldots (u_m + iv_m)^{|\nu_\lambda|} \ldots (u_s + iv_s)^{|\rho_\lambda|}$$
$$(1 - i)^{\delta_\lambda} . (u_1 - iv_1)^{|\alpha_\lambda|} \ldots (u_m - iv_m)^{|\nu_\lambda|} \ldots (u_s - iv_s)^{|\rho_\lambda|}$$

$a_\lambda + ib_\lambda$ ne contenant pas de diviseurs réels, il ne peut pas être divisible à la fois par $u_m + iv_m$ et $u_m - iv_m$. Si $|\nu_\lambda|$ est > 0, *la plus grande puissance de* $u_m \pm iv_m$ *qui divise* $a_\lambda + ib_\lambda$ *sera* $(u_m \pm iv_m)^{|\nu_\lambda|}$. Soit en effet

$$a_\lambda + ib_\lambda = (u_m \pm iv_m)^\nu . t$$

t n'étant pas divisible par $u_m \pm iv_m$. En prenant les normes on aura

$$a_\lambda^2 + b_\lambda^2 = p^{\nu} . t . t'$$

ce qui est impossible à moins que $\nu = |\nu_\lambda|$, $t . t'$ n'étant pas divisible par p_m. On aura ainsi, $1 + i$ étant $= i(1 - i)$

$$a_\lambda + ib_\lambda =$$
$$= \varepsilon_\lambda (1 - i)^{\delta_\lambda} . (u_1 \pm iv_1)^{|\alpha_\lambda|} \ldots (u_m \pm iv_m)^{|\nu_\lambda|} \ldots (u_s \pm iv_s)^{|\rho_\lambda|}$$

où les signes ne sont pas connus, et de même

$$a_\mu + ib_\mu =$$
$$= \varepsilon_\mu (1 - i)^{\delta_\mu} . (u_1 \pm iv_1)^{|\alpha_\mu|} \ldots (u_m \pm iv_m)^{|\nu_\mu|} \ldots (u_s \pm iv_s)^{|\rho_\mu|}$$

Un des nombres $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n$ est différent de 0. Soit ν_λ ce nombre. $a_\lambda + ib_\lambda$ est alors divisible par $u_m + iv_m$ ou par $u_m - iv_m$. Le produit $\nu_\lambda . \nu_\mu$ étant positif seulement, si $a_\lambda b_\mu - b_\lambda a_\mu = (a_\lambda + ib_\lambda) b_\mu - (a_\mu + ib_\mu) b_\lambda$ est divisible par $p_m = (u_m + iv_m)(u_m - iv_m)$, il faut que $a_\lambda + ib_\lambda$ et $a_\mu + ib_\mu$ soient tous les deux divisibles par $u_m + iv_m$ ou par $u_m - iv_m$, si ν_λ et ν_μ ont le même signe, et l'un divisible par $u_m + iv_m$, l'autre par $u_m - iv_m$, si ν_λ et ν_μ ont des signes opposés.

Nous avons maintenant

$$c_1 \nu_1 + c_2 \nu_2 + \ldots + c_n \nu_n = 0.$$

En chassant ceux des ν qui sont $= 0$ et en désignant par $c' \nu'$ les termes correspondants aux nombres $a + ib$ divisibles par le même diviseur $u_m \pm iv_m$ que $a_\lambda + ib_\lambda$ et par $c'' \nu''$ ceux correspondants aux nombres $a + ib$ divisibles par le diviseur conjugué $u_m \mp iv_m$ cette relation peut s'écrire

$$\sum c'\nu' + \sum c''\nu'' = 0$$

d'où, en se rappelant que ν' et ν'' sont de signes opposés

$$\sum c'|\nu'| = \sum c''|\nu''|$$

c'est-à-dire que:

La somme des exposants de tous les diviseurs $u_m + iv_m$ *qui divisent le produit* $(a_1 + ib_1)^{c_1} . (a_2 + ib_2)^{c_2} \ldots (a_n + ib_n)^{c_n}$ *est égale à la somme des exposants de tous les diviseurs* $u_m - iv_m$.

Mais alors, le produit peut s'écrire $\varepsilon (1 - i)^\delta R$, ε étant une unité, R un nombre réel et

$$\delta = c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 + \ldots + c_n \delta_n$$

Or $\delta + k$ étant pair, le produit

$$\varepsilon (1 - i)^{\delta + k} R =$$
$$= \varepsilon (1 - i)^k . (a_1 + ib_1)^{c_1} . (a_2 + ib_2)^{c_2} \ldots (a_n + ib_n)^{c_n}$$

sera réel ou purement imaginaire, d'où

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{b_1}{a_1} + c_2 \operatorname{arc\,tg} \frac{b_2}{a_2} + \ldots + c_n \operatorname{arc\,tg} \frac{b_n}{a_n} = k \frac{\pi}{4}$$

aux multiples de $\frac{\pi}{2}$ près, *c. q. f. d.*

Le cas le plus intéressant est celui où tous les numérateurs b sont $= 1$. Dans ce cas, le théorème prend la forme suivante, que M. POINCARÉ m'a fait l'honneur de présenter à l'Académie,*) savoir:

Théorème 2.

Pour que les nombres entiers $x_1 x_2 \dots x_n$ satisfassent à l'équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_1} + c_2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_2} + \dots + c_n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_n} = k \frac{\pi}{4} \tag{3}$$

aux multiples de $\frac{\pi}{2}$ près, $c_1 c_2 \dots c_n$ étant des nombres entiers et positifs et k étant $= 0$ ou $= 1$, il faut et il suffit que:

$$1 + x_1^2 = 2^{\delta_1} . p_1^{|\alpha_1|} \dots p_m^{|\nu_1|} \dots p_s^{|\rho_1|} = 2^{\delta_1} . \prod p_m^{|\nu_1|}$$

$$1 + x_2^2 = 2^{\delta_2} . p_1^{|\alpha_2|} \dots p_m^{|\nu_2|} \dots p_s^{|\rho_2|} = 2^{\delta_2} . \prod p_m^{|\nu_2|}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$1 + x_n^2 = 2^{\delta_n} . p_1^{|\alpha_n|} \dots p_m^{|\nu_n|} \dots p_s^{|\rho_n|} = 2^{\delta_n} . \prod p_m^{|\nu_n|}$$

où $\delta_1 \delta_2 \dots \delta_n$ sont $= 0$ ou $= 1$ de telle sorte que

$$c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 + \dots + c_n \delta_n + k$$

soit pair. $p_1 \dots p_m \dots p_s$ sont des nombres premiers réels

*) Voir Comptes Rendus 1896, c. 4 et 5.

de la forme $4h + 1$, $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n$ *des nombres entiers ou* 0 *assujettis à la relation*

$$c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + \ldots + c_n \nu_n = 0$$

et $|\nu|$ *désigne comme d'ordinaire la valeur absolue de* ν

— *et que* $x_\lambda - x_\mu$ *ne soit divisible par* p_m, *que si* $\nu_\lambda . \nu_\mu$ *est positif, l'un des exposants* $|\nu_\lambda|$ *et* $|\nu_\mu|$ *étant* > 0.*)

En remarquant que

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$$

on voit que le théorème 2 subsiste encore si l'on y remplace des $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$ par des $\operatorname{arc\,tg} x$.

Il y a lieu de remarquer l'intime liaison qui existe entre la théorie des solutions entières de l'équation (3) *et la théorie des diviseurs des nombres de la forme* $1 + x^2$.

---

*) La dernière partie de la condition diffère un peu de celle énoncée dans ma note insérée aux Comptes Rendus, a savoir que $x_\lambda + x_\mu$ doit être divisible par p_m dans le cas seulement où $\nu_\lambda . \nu_\mu$ est négatif (l'un des $|\nu_\lambda|$ et $|\nu_\mu|$ étant > 0). Mais elles sont équivalentes; en effet si $\nu_\lambda . \nu_\mu$ est $\gtrless 0$, $x_\lambda^2 - x_\mu^2 = (x_\lambda + x_\mu)(x_\lambda - x_\mu)$ sera divisible par p_m, et x_λ et x_μ n'étant pas divisibles par p_m, soit $x_\lambda + x_\mu$, soit $x_\lambda - x_\mu$ sera divisible par ce nombre.

La condition posée ici me semble plus naturelle.

Les diviseurs premiers p se distribuent en différentes espèces, selon que les nombres $\alpha, \ldots \nu, \ldots \rho$ sont positifs, négatifs ou $=0$. On voit aisément, que le nombre de ces espèces est

$$N = 2^{n-1} - 1 + \binom{n}{1}(2^{n-2} - 1) + \binom{n}{2}(2^{n-3} - 1) + \ldots + \binom{n}{1}(2 - 1)$$

ou

$$N = \frac{3^n + 1}{2} - 2^n$$

On trouve par ex. pour

$n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$
$N = 0, 1, 6, 25, 90, 301, 966, 3025, 9330, 28501, \ldots$

Nous allons plus tard mettre en évidence ces espèces dans les cas les plus simples, où $n = 2$ et $n = 3$.

Je vais encore mentionner quelques autres théorèmes que j'ai communiqués dans une lettre à M. Gravé à St. Pétersbourg savoir:

Théorème 3.

Pour que l'équation

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_1} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_2} + \ldots + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_n} = k\frac{\pi}{2}$$

soit satisfaite en nombres entiers $x_1 x_2 \ldots x_n$, *k étant entier ou* $=0$, *il faut que le produit*

$$(1 + x_1^2)(1 + x_2^2) \ldots (1 + x_n^2)$$

soit un carré parfait.

En effet, la condition nécessaire pour que l'équation indiquée soit satisfaite est que

$$(x_1+i)(x_2+i)\,\ldots\,(x_n+i)=\varepsilon\,.\,\mathrm{P}$$

où ε est une unité et P un nombre entier réel, d'où, en prenant les normes

$$(1+x_1^2)(1+x_2^2)\,\ldots\,(1+x_n^2)=\mathrm{P}^2$$

c. q. f. d.

Théorème 4.

Pour que l'équation

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_1}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_2}+\,\ldots\,+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_n}=k\frac{\pi}{2}$$

soit satisfaite en nombres entiers $x_1x_2\ldots x_n$, *k étant entier ou* $=0$, *il faut que*

$$\Pi_1=(x_1+x_1)(x_2+x_1)\ldots(x_\rho+x_1)\ldots(x_n+x_1)=\mathrm{A}_1(1+x_1^2)$$
$$\Pi_2=(x_1+x_2)(x_2+x_2)\ldots(x_\rho+x_2)\ldots(x_n+x_2)=\mathrm{A}_2(1+x_2^2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Pi_\rho=(x_1+x_\rho)(x_2+x_\rho)\ldots(x_\rho+x_\rho)\ldots(x_n+x_\rho)=\mathrm{A}_\rho(1+x_\rho^2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Pi_n=(x_1+x_n)(x_2+x_n)\ldots(x_\rho+x_n)\ldots(x_n+x_n)=\mathrm{A}_n(1+x_n^2)$$

$\mathrm{A}_1\,\mathrm{A}_2\,\ldots\,\mathrm{A}_\rho\,\ldots\,\mathrm{A}_n$ *étant des nombres entiers.*

On a en effet

$$\Pi_\rho=(x_1+i+x_\rho-i)(x_2+i+x_\rho-i)\ldots(x_\rho+i+x_\rho-i)\ldots(x_n+i+x_\rho-i)$$

d'où

$$\Pi_\rho=(x_1+i)(x_2+i)\ldots(x_\rho+i)\ldots(x_n+i)+(x_\rho-i)\,\mathrm{R}$$

R étant l'ensemble des termes qui multiplient $x_\rho-i$.

Mais, le produit $(x_1+i)(x_2+i)\ldots(x_n+i)$ étant réel ou purement imaginaire (Voir § 2) on a

$$(x_1+i)(x_2+i)\ldots(x_n+i)=\pm(x_1-i)(x_2-i)\ldots(x_n-i)$$

ce qui donne

$$\Pi_\rho=\pm(x_1-i)(x_2-i)\ldots(x_\rho-i)\ldots(x_n-i)+(x_\rho-i)\mathrm{R}$$

Π_ρ est donc divisible par $x_\rho-i$ et, quand il est réel, il est aussi divisible par $x_\rho+i$, c'est-à-dire, par $1+x_\rho^2$ *c. q. f. d.*

Ce théorème peut aussi être déduit du théorème général 2. En posant plusieurs des x égaux entre eux, on obtient des théorèmes analogues sur l'équation (3) et ces théorèmes peuvent aussi être étendus à l'équation (1).

Nous allons vérifier ces théorèmes sur *un exemple numérique*, savoir:

$$12 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{17} - 7 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{307} + 5 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{99} + 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{57} = \frac{\pi}{4}$$

On a ici

$$1+17^2=2\,.\,5\,.\,29$$
$$1+307^2=2\,.\,5^3\,.\,13\,.\,29$$
$$1+99^2=2\,.\,13^2\,.\,29$$
$$1+57^2=2\,.\,5^3\,.\,13$$

Par conséquent

$$x_1=17\,,\quad x_2=-307\,,\quad x_3=99\,,\quad x_4=57$$
$$c_1=12\,,\quad c_2=7\,,\quad c_3=5\,,\quad c_4=3\,,\quad k=1$$
$$p_1=5\,,\quad p_2=13\,,\quad p_3=29$$

et $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_1=1$, d'où $c_1\delta_1+c_2\delta_2+c_3\delta_3+c_4\delta_4+k=28$, nombre pair, comme il le fallait.

On a encore

$$
\begin{array}{lll}
|\alpha_1| = 1 & |\beta_1| = 0 & |\gamma_1| = 1 \\
|\alpha_2| = 3 & |\beta_2| = 1 & |\gamma_2| = 1 \\
|\alpha_3| = 0 & |\beta_3| = 2 & |\gamma_3| = 1 \\
|\alpha_4| = 3 & |\beta_4| = 1 & |\gamma_4| = 0
\end{array}
$$

Posons alors

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 \qquad \beta_2 = \varepsilon_2 \qquad \gamma_1 = \varepsilon_3$$

où ε_1 ε_2 et ε_3 sont $= \pm 1$, mais de signes inconnus.

Or,

$$
\begin{array}{llr}
x_1 - x_2 = 324 & \text{non divisible par } 5 \text{ donne} & \alpha_2 = -3\varepsilon_1 \\
x_1 - x_4 = -40 & \text{div.} \quad . \quad . \quad . \quad . & \alpha_4 = 3\varepsilon_1 \\
x_2 - x_3 = -406 & \text{non div.} \quad . \ 13 \ . \quad . & \beta_3 = -2\varepsilon_2 \\
x_2 - x_4 = -364 & \text{div.} \quad . \quad . \quad . \quad . & \beta_4 = \varepsilon_2 \\
x_1 - x_2 = 324 & \text{non div.} \quad . \ 29 \ . \quad . & \gamma_2 = -\varepsilon_3 \\
x_1 - x_3 = -82 & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . & \gamma_3 = -\varepsilon_3
\end{array}
$$

et l'on aura

$$
\begin{aligned}
c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 &= \varepsilon_1(12 - 3 \cdot 7 + 3 \cdot 3) = 0 \\
c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 + c_4\beta_4 &= \varepsilon_2(7 - 2 \cdot 5 + 3) = 0 \\
c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + c_3\gamma_3 + c_4\gamma_4 &= \varepsilon_3(12 - 7 - 5) = 0
\end{aligned}
$$

Les conditions du théorème 2 se trouvent ainsi remplies.

De plus, en écrivant l'équation

$$12 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{17} - 7 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{307} + 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{99} + 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1} = 0$$

on verra que

$$(1 + x_1^2)^{12}(1 + x_2^2)^7(1 + x_3^2)^5(1 + x_4^2)^3(1 + x_5^2) = 2^{28} \cdot 5^{42} \cdot 13^{20} \cdot 29^{24}$$

c. a. d. un carré parfait, conformément au théorème 3.

Trykt den 12te November 1896.

Enfin

$$\Pi_1 = 34^{12} . (-290)^7 . 116^5 . 74^3 . 16 = A_1 (2 . 5 . 29) = A_1 (1 + 17^2)$$

$$\Pi_2 = (-290)^{12} (-614)^7 (-208)^5 (-250)^3 (-308) =$$
$$= A_2 (2 . 5^3 . 13 . 29) = A_2 (1 + 307^2)$$

$$\Pi_3 = 116^{12} . (-208)^7 . 198^5 . 156^3 . 98 = A_3 (2 . 13^2 . 29) = A_3 (1 + 99^2)$$

$$\Pi_4 = 74^{12} . (-250)^7 . 156^5 . 114^3 . 56 = A_4 (2 . 5^3 . 13) = A_4 (1 + 57^2)$$

$$\text{et } \Pi_5 = 16^{12} \ldots = A_5 (1 + 1^2)$$

et l'on voit ainsi que le théorème 4 est aussi satisfait.

---

§ 4.

Premier et deuxième cas spéciaux. Solution complète de l'équation:

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$$

Considérons *le cas le plus simple* de l'équation (1):

$$c \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} = k \frac{\pi}{4} \tag{4}$$

On peut supposer que *c et k sont des nombres entiers positifs premiers entre eux.* D'après le théorème général 1, il faut donc que

$$a^2 + b^2 = 2^{\delta} . \prod p_m^{|\nu|}$$

où

$$c \cdot \nu = 0$$

c'est-à-dire, c étant > 0

$$\nu = 0$$

et l'expression de $a^2 + b^2$ se réduit à

$$a^2 + b^2 = 2^\delta$$

δ étant $= 0$ ou $= 1$. Mais alors les nombres a et b n'ont que les valeurs ± 1 et 0, et $\frac{b}{a}$ les valeurs $\pm 1, 0, \infty$; par conséquent:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} = k_1 \frac{\pi}{4}$$

qui, substitué dans (4), donne

$$ck_1 \frac{\pi}{4} = k \frac{\pi}{4}$$

$$ck_1 = k$$

et, c et k étant premiers entre eux, il faut que:

$$c = 1 \qquad k = k_1$$

L'équation (4) devient alors impossible si $c > 1$ et en passant aux tangentes on aura

Théorème 5.

$\frac{m}{n}$ étant une fraction irréductible ($n > 1$), tg $\frac{m}{n}\frac{\pi}{4}$ est toujours irrationnel.

Considérons *le deuxième cas spécial, pour* $n=2$.

On aura une équation de la forme

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{c} = k\frac{\pi}{4} \tag{5}$$

On peut évidemment supposer que m et n sont des entiers positifs et k un entier positif ou $=0$. De plus, si $k>0$, on peut supposer que m, n et k ne sont pas tous divisibles par le même diviseur.

Quant aux nombres m et n on peut les supposer *premiers entre eux*. Soient en effet

$$m = \rho m_1 \qquad n = \rho n_1$$

m_1 et n_1 étant premiers entre eux. On aura donc

$$\rho\left(m_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + n_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{c}\right) = k\frac{\pi}{4}$$

Mais, d'après le théorème d'addition des arcs-tangentes, la somme entre les crochets peut s'écrire $\operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}$, A et B étant premiers entre eux, d'où

$$\rho \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A} = k\frac{\pi}{4}$$

Mais cette équation étant de la forme (4) il faut que

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A} = k_1\frac{\pi}{4}$$

c'est-à-dire

$$m_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + n_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{c} = k_1\frac{\pi}{4}$$

et *l'on retombe ainsi sur une équation de la même forme que* (5), *mais où* m *et* n *sont premiers entre eux.*

Mettons en évidence les conditions spéciales pour le cas simple (5). On aura, d'après le théorème 2:

$$a^2 + b^2 = 2^{\delta_1} \cdot p_1^{|\alpha_1|} \dots p_r^{|\nu_1|} \dots p_s^{|\rho_1|}$$
$$c^2 + d^2 = 2^{\delta_2} \cdot p_1^{|\alpha_2|} \dots p_r^{|\nu_2|} \dots p_s^{|\rho_2|}$$

où

$$m\nu_1 + n\nu_2 = 0$$

ν_1 et ν_2 sont ainsi de signes opposés, $\nu_1 . \nu_2$ *sera négatif* et il vient

$$m|\nu_1| = n|\nu_2|$$

et, m et n étant premiers entre eux, il faut que

$$|\nu_1| = n\tau$$
$$|\nu_2| = m\tau$$

où τ est un nombre entier positif quelconque.

Cela donne

$$a^2 + b^2 = 2^{\delta_1} \cdot p_1^{n\tau_1} \dots p_r^{n\tau_r} \dots p_s^{n\tau_s} = 2^{\delta_1} . A^n$$
$$c^2 + d^2 = 2^{\delta_2} \cdot p_1^{m\tau_1} \dots p_r^{m\tau_r} \dots p_s^{m\tau_s} = 2^{\delta_2} . A^m$$

en posant

$$p_1^{\tau_1} \cdot p_2^{\tau_2} \dots p_s^{\tau_s} = A.$$

De plus $ad - cb$ ne sera pas divisible par les nombres premiers $p_1 p_2 \dots p_s$ et par conséquent *premier à* A.

On a donc le théorème suivant:

Théorème 6.

Pour que l'équation

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{c} = k\frac{\pi}{4}$$

soit satisfaite en nombres entiers a, b, c et d, $\frac{b}{a}$ *et* $\frac{d}{c}$ *étant des fractions irréductibles différentes de* ± 1 *et m, n et k étant des nombres entiers positifs qui ne sont pas tous divisibles par le même diviseur* > 1 *(ou* $k = 0$*), il faut que m et n soient premiers entre eux.*

Alors il faut et il suffit que:

$$a^2 + b^2 = 2^{\delta_1} . A^n$$

$$c^2 + d^2 = 2^{\delta_2} . A^m$$

et que ad — bc soit premier à k,

δ_1 *et* δ_2 *étant* $= 0$ *ou* $= 1$ *de telle manière, que* $m\delta_1 + n\delta_2 + k$ *soit pair et A étant un nombre impair, dont tous les diviseurs premiers ont la forme* $4h + 1$.

Par exemple, Vega a trouvé la formule

$$5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{79} = \frac{\pi}{4}$$

Ici on a

$$1 + 7^2 = 2 . 5^2$$

$$3^2 + 79^2 = 2 . 5^5$$

et

$$79 - 3 . 7 = 58, \text{ premier à } A = 5,$$

comme il le fallait.

Le cas le plus intéressant est celui où les numérateurs b et d sont $= 1$; on aura donc l'équation déjà mentionnée dans le paragraphe 1

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$$

En effet, on est naturellement conduit à cette équation, si l'on veut calculer le nombre π par des développements d' arcs-tangentes.

Elle a donc contracté un certain intérêt historique. Déjà EULER *a posé le problème de la résoudre complètement en nombres entiers,* mais sans y réussir; il a trouvé deux des solutions indiquées (§ 1). MACHIN a trouvé la solution la plus commode pour le calcul de π, savoir celle qui porte son nom (§ 1) et qui est bien connue.

En 1895, M. GRAVÉ à St. Pétersbourg posa ce problème comme question dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (T. II, p 228); mais jusqu'ici il me semble qu'on n'y avait pas répondu complétement.

Dans mon travail: *Solution complète* etc., déjà cité j'ai réussi à résoudre complètement ce problème. En effet j'ai trouvé le théorème suivant:

Théorème 7.

Les seules solutions en nombres entiers x, y, m, n de l'équation

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}$$

où $|x \cdot y| > 1$ *et où*

1) k *est un nombre entier et* m, n *et* k *non tous divisibles par un même diviseur, ou*

2) $k = 0$ *et* m *et* n *premiers entre eux,*

sont celles déjà trouvées:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(EULER)}$$

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{3} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(EULER, VEGA)}$$

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(MACHIN)}$$

Pour toutes ces solutions les conditions du théorème 6 sont remplies; en effet, on a

$1+2^2=5$	$1+2^2=5$	$1+3^2=2.5$	$1+5^2=2.13$
$1+3^2=2.5$	$1+7^2=2.5^2$	$1+7^2=2.5^2$	$1+239^2=2.13^4$
$2-3=-1$	$2+7=9$	$3-7=-4$	$5+239=4.61$

Du théorème 7, on tire comme corollaire:

L'équation

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} = n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y}$$

m et n étant premiers entre eux, $|m.n| > 1$ et $|x.y| > 1$, est impossible en nombres entiers m, n, x et y.

Dans le même travail: *Solution complète* etc., j'ai aussi démontré le théorème suivant:

Théorème 8.

Pour que l'équation

$$1 + x^2 = 2z^n \qquad (n > 1)$$

soit satisfaite en nombres entiers x et z autres que ± 1, il faut que n soit une puissance de 2.

Ce théorème et un autre qui est du à M. Lebesgue*):

Théorème 9.

L'équation $1 + x^2 = z^n$ est impossible en nombres entiers autres que $x = 0$, $z = 1$, si n est un nombre entier > 1,

nous seront très utiles dans ce qui va suivre.

---

*) Voir: *Nouvelles Annales de Mathématiques* t. IX, 1ère série, p. 172.

§ 5.

Quelques théorèmes sur les tangentes.

Posons dans le théorème 6, $b = 1$ et $k = 2h$, h étant entier ou $= 0$.

On aura donc une équation de la forme:

$$m \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} + n \operatorname{arc\,tg} \frac{d}{c} = h \frac{\pi}{2} \tag{6}$$

La condition que doit remplir le nombre a sera

$$1 + a^2 = 2^{\delta_1} . A^n$$

Or, si n est pair, m sera impair et pour que $m\delta_1 + n\delta_2$ soit pair, il faudra que $\delta_1 = 0$, d'où

$$1 + a^2 = A^n$$

et si m et n sont tous les deux impairs on aura

$$\left.\begin{array}{ll} & 1 + a^2 = A^n \\ \text{ou} & 1 + a^2 = 2A^n \end{array}\right\} \text{(n étant impair).}$$

Mais, d'après les théorèmes 8 et 9, ces équations sont toutes impossibles en nombres entiers > 1, si $n > 1$. Dans ce cas notre équation (6) devient ainsi impossible, c'est-à-dire, que $\frac{d}{c}$ ne peut pas être rationnel. En passant aux tangentes on déduit le théorème suivant:

Trykt den 19de November 1896.

Théorème 10.

φ étant un arc qui n'est pas un multiple de $\frac{\pi}{4}$ et dont la tangente est un nombre entier ou l'inverse d'un nombre entier,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{m\varphi + h\frac{\pi}{2}}{n}\right)$$

est toujours irrationnel, si h est un nombre entier ou $=0$ et $\frac{m}{n}$ une fraction irréductible dont le dénominateur n est >1.

Ce théorème est une extension du théorème 5.

On peut aussi donner au théorème 10 la forme suivante:

φ étant un arc non multiple de $\frac{\pi}{4}$ et dont la tangente est rationnelle, tg $\left(\frac{n\varphi + h\frac{\pi}{2}}{m}\right)$ n'est jamais un nombre entier ou l'inverse d'un nombre entier, si h est un nombre entier ou $=0$ et $\frac{n}{m}$ une fraction irréductible, dont le numérateur n est >1.

Il me semble avoir lu quelque part,*) que, si l'équation algébrique qui détermine $x = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{n}$ à l'aide de $A = \operatorname{tg}\varphi$ n'a pas de racines rationnelles (A étant rationnel et n un nombre premier), elle sera *irréductible*. Je me ne rappelle pas où j'ai

*) Peut-être dans les *Nouvelles Annales*.

rencontré cette proposition et je ne suis pas sur qu'elle soit vrai. *Dans le cas affirmatif, les théorèmes 5 et 10 donnent lieu à une classe d'équations irréductibles.* (Voir p. 73).

Il y a lieu ici de mentionner un autre théorème très intéressant sur les tangentes que M. GRAVÉ à St. Pétersbourg m'a communiqué dans une lettre, savoir*)

Si $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$, *a et b étant premiers entre eux,* $\operatorname{tg} n\varphi = \dfrac{\frac{1}{2^\nu}B}{\frac{1}{2^\nu}A}$ *sera irréductible, A et B étant donnés par*

$$A = \frac{(a+ib)^n + (a-ib)^n}{2}, \quad B = \frac{(a+ib)^n - (a-ib)^n}{2i}$$

où n est un nombre entier positif > 1 *et où* $\nu = 0$, *si* $a^2 + b^2$ *est impair et égal au plus grand nombre entier contenu dans* $\frac{n}{2}$, *si* $a^2 + b^2$ *est pair.*

Ce théorème peut aisément être démontré par la théorie des nombres entiers complexes.

Soit d'abord l'un des nombres a, b pair, l'autre impair.

Alors $a^2 + b^2$ est impair et nous avons $\operatorname{tg} n\varphi = \frac{B}{A}$. **)

---

*) L'énoncé du théorème diffère un peu de celui de M. GRAVÉ.

**) On le déduit, comme on le sait, en identifiant les arguments $n \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ et $\operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}$ dans l'équation:

$$(a + ib)^n = A + iB$$

qui peut s'écrire

$$r e^{i\, n \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}} = R e^{i \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}}$$

Nous allons démontrer que A et B sont premiers entre eux. Soit en effet ρ un diviseur premier complexe commun à A et B. ρ divisera alors $A + iB$ et $A - iB$, c'est-à-dire $(a + ib)^n$ et $(a - ib)^n$; mais alors il divisera $a + ib$ et $a - ib$, par conséquent aussi $2a$, $2b$ et $a^2 + b^2$. Mais $a^2 + b^2$ étant impair et a et b premiers entre eux, il faut que ρ soit une unité, c'est-à-dire que *A et B sont premiers entre eux.*

Soient maintenant a et b impairs.

On voit, comme dans le cas précédent, qu'un diviseur premier complexe ρ commun à A et B divisera $2a$, $2b$ et $a + ib = 2a_1 + 1 + i(2b_1 + 1) = 2(a_1 + ib_1) + 1 + i$ et, 2 étant $= -i(1 + i)^2$ et a et b premiers entre eux, *il faut que ρ soit associé à $1 + i$, $\rho = \varepsilon(1 + i)$,* ε étant une unité.

Or nous avons

$$(a + ib)^n = [2(a_1 + ib_1) + 1 + i]^n = (1 + i)^n . P$$
$$(a - ib)^n = (1 - i)^n . P' = \varepsilon'(1 + i)^n . P' = (1 + i)^n . Q$$

P et Q n'étant pas divisibles par $1 + i$.

Le plus grand diviseur réel p commun à $(a+ib)^n = A + iB$ et $(a - ib)^n = A - iB$ sera alors

$$p = \varepsilon_1(1 + i)^n = 2^{\frac{n}{2}}, \text{ si } n \text{ est pair et}$$
$$p = \varepsilon_2(1 + i)^{n-1} = 2^{\frac{n-1}{2}}, \text{ si } n \text{ est impair,}$$

ε_1 et ε_2 étant des unités, c'est-à-dire, $p = 2^\nu$, ν étant le plus grand entier contenu dans $\frac{n}{2}$. On aura donc $A \pm iB = p(A_1 \pm iB_1)$, où $A_1 = \frac{A}{p}$ et $B_1 = \frac{B}{p}$ seront premiers entre eux, *c. q. f. d.*

Ce théorème peut être considérablement étendu aux expressions de la forme

$$\operatorname{tg}(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \dots + m_n\varphi_n),$$

où $\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$, ... $\operatorname{tg}\varphi_n$ sont rationnelles; mais cela nous entrainerait trop loin.

---

§ 6.

Troisième cas spécial:

$$\lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + \mu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} = k\frac{\pi}{4}$$

L'équation à deux termes au premier membre

$$m \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}$$

n'admettant que les 4 solutions indiquées, on est naturellement conduit à traiter le cas suivant, où l'on a 3 termes:

$$\lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + \mu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} = k \tag{7}$$

Nous allons mettre en évidence les diverses espèces de diviseurs premiers p dans ce cas (Voir p. 22) et développer la forme modifiée du théorème 2.

On peut évidemment supposer que λ, μ et ν sont tous positifs et k positif ou $= 0$ et, comme on l'a fait dans le § 4, on peut supposer que λ, μ et ν ne sont pas tous divisibles par un même diviseur.

Posons maintenant

$$\begin{array}{lll} \lambda = \rho_1 n_1 & \lambda = \rho_2 n_3 & \mu = \rho_3 n_5 \\ \mu = \rho_1 n_2 & \nu = \rho_2 n_4 & \nu = \rho_3 n_6 \end{array}$$

où ρ_1 est le plus grand diviseur commun à λ et μ, ρ_2 celui à λ et ν et ρ_3 celui à μ et ν. $n_1\, n_2 \ldots n_6$ sont les quotients entiers correspondants.

$\rho_1\, \rho_2$ et ρ_3 sont *premiers entre eux*, parcequ'un diviseur commun à deux de ces nombres serait commun à λ, μ et ν, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Cela donne

$$\begin{array}{l} \rho_1 n_1 = \rho_2 n_3 \\ \rho_1 n_2 = \rho_3 n_5 \\ \rho_2 n_4 = \rho_3 n_6 \end{array}$$

et $\rho_1\, \rho_2$ et ρ_3 étant premiers entre eux, il faut que

$$\begin{array}{lll} n_1 = \rho_2 a & n_2 = \rho_3 b & n_4 = \rho_3 c \\ n_3 = \rho_1 a & n_5 = \rho_1 b & n_6 = \rho_2 c \end{array}$$

a, b et c étant des nombres entiers positifs. Cela donne

$$\begin{array}{l} \lambda = \rho_1 \rho_2 a \\ \mu = \rho_1 \rho_3 b \\ \nu = \rho_2 \rho_3 c \end{array}$$

a, b et c seront premiers entre eux, parceque $\rho_1\, \rho_2$ et ρ_3 sont les plus grands diviseurs communs respectivement à λ et μ, λ et ν et μ et ν. Enfin, λ, μ et ν n'étant pas tous les trois divisibles par un même diviseur, a et ρ_3, b et ρ_2 et c et ρ_1 sont respectivement premiers entre eux.

Considérons maintenant les expressions générales de $1+x^2$, $1+y^2$ et $1+z^2$, d'après le théorème *2*:

$$1+x^2=2^{\delta_1}\prod p_m^{|\nu_1|}$$

$$1+y^2=2^{\delta_2}\prod p_m^{|\nu_2|}$$

$$1+z^2=2^{\delta_3}\prod p_m^{|\nu_3|}$$

où

$$\lambda\nu_1+\mu\nu_2+\nu\nu_3=0$$

Cette dernière équation peut être simplifiée en y substituant les valeurs de λ, μ et ν. On aura donc

$$\rho_1\,\rho_2\,a\,\nu_1+\rho_1\,\rho_3\,b\,\nu_2+\rho_2\,\rho_3\,c\,\nu_3=0$$

$\rho_1\,\rho_2\,a$ étant premier à ρ_3 etc., il faut, que

$$\nu_1=\rho_3\,\sigma_1 \qquad \nu_2=\rho_2\,\sigma_2 \qquad \nu_3=\rho_1\,\sigma_3$$

et il vient

$$a\sigma_1+b\sigma_2+c\sigma_3=0$$

σ_1, σ_2 et σ_3 étant des nombres entiers avec les mêmes signes que ν_1, ν_2 et ν_3. On aura ainsi:

$$1+x^2=2^{\delta_1}\prod p_m^{\rho_3|\sigma_1|}=2^{\delta_1}\left[\prod p_m^{|\sigma_1|}\right]^{\rho_3}$$

$$1+y^2=2^{\delta_3}\prod p_m^{\rho_2|\sigma_2|}=2^{\delta_2}\left[\prod p_m^{|\sigma_2|}\right]^{\rho_2}$$

$$1+z^2=2^{\delta_3}\prod p_m^{\rho_1|\sigma_3|}=2^{\delta_3}\left[\prod p_m^{|\sigma_3|}\right]^{\rho_1}$$

où, nous le répétons

$$a\sigma_1+b\sigma_2+c\sigma_3=0 \tag{8}$$

Avant de faire des simplifications ultérieures de ces expressions, nous allons mettre en évidence les différentes espèces de diviseurs p.

Selon que les nombres σ_1 σ_2 et σ_3 sont positifs, négatifs ou $=0$, on aura les 6 espèces suivantes:

1) *Diviseurs p, pour lesquels* $\sigma_3 = 0$.

On aura donc

$$a\sigma_1 + b\sigma_2 = 0$$

d'où

$$a|\sigma_1| = b|\sigma_2|$$

et $\sigma_1 . \sigma_2$ *sera négatif.*

Mais, a et b étant premiers entre eux, il faut que

$$|\sigma_1| = b . \tau, \qquad |\sigma_2| = a . \tau$$

τ étant un nombre entier positif quelconque.

L'ensemble de ces diviseurs p donne alors un facteur

$$\prod p^{|\sigma_1|} = \prod p^{b\tau} = p_1^{b\tau_1} . p_2^{b\tau_2} \ldots p_s^{b\tau_s} = A^b$$

dans l'expression de $1 + x^2$ et un facteur

$$\prod p^{|\sigma_2|} = \prod p^{a\tau} = p_1^{a\tau_1} . p_2^{a\tau_2} \ldots p_s^{a\tau_s} = A^a$$

dans l'expression de $1 + y^2$, en posant

$$p_1^{\tau_1} . p_2^{\tau_2} \ldots p_s^{\tau_s} = A$$

A est donc un nombre impair, dont tous les diviseurs premiers sont de la forme $4h + 1$.

$\sigma_1 . \sigma_2$ étant négatif, $x - y$ ne sera pas divisible par les nombres $p_1 \ldots p_s$ et sera donc premier à A. Mais $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ étant divisible par A, il *faut donc que $x + y$ le soit.*

2) *Diviseurs premiers p, pour lesquels* $\sigma_2 = 0$ ce qui donne de la même manière

un facteur B^c dans l'expression de $1 + x^2$

et

un facteur B^a dans l'expression de $1 + z^2$

où B est un nombre entier analogue à A, mais premier à ce nombre, et $x + z$ sera divisible par B.

3) *Diviseurs premiers, pour lesquels* $\sigma_1 = 0$, ce qui donne un facteur C^c dans l'expression de $1 + y^2$ et un facteur C^b dans l'expression de $1 + z^2$, C étant entier, analogue à A et B, mais premier à ces nombres, et $y + z$ sera divisible par C.

4) *Diviseurs premiers, pour lesquels* $\sigma_1\ \sigma_2$ *et* σ_3 *sont tous différents de* 0 *et où* σ_1 *et* σ_2 *ont le même signe.*

En posant $|\sigma_1| = \alpha$, $|\sigma_2| = \alpha'$, $|\sigma_3| = \alpha''$ on aura les facteurs Πp^α, $\Pi p^{\alpha'}$, $\Pi p^{\alpha''}$ dans les expressions respectives de $1 + x^2$, $1 + y^2$ et $1 + z^2$, où α, α' et α'' sont des nombres entiers positifs liés par la relation:

$$a\alpha + b\alpha' = c\alpha''$$

et $\sigma_1 . \sigma_3$ et $\sigma_2 . \sigma_3$ étant négatifs et $\sigma_1 . \sigma_2$ positif, $x - z$ et $y - z$ seront premiers à Πp, $x - y$ divisible par Πp, ou, ce qui revient au même, $x + z$ et $y + z$ seront divisibles par Πp, $x + y$ premier à Πp.

Trykt den 25de November 1896.

5) *Diviseurs premiers p, pour lesquels* σ_1, σ_2 *et* σ_3 *sont tous différents de* 0 *et* σ_1 *et* σ_3 *de même signe.*

En appelant ces diviseurs q, on aura les facteurs Πq^{β}, $\Pi q^{\beta'}$, $\Pi q^{\beta''}$ dans les expressions de $1 + x^2$, $1 + y^2$ et $1 + z^2$, où β, β' et β'' sont des nombres entiers positifs liés par la relation:

$$a\beta + c\beta'' = b\beta'$$

et $x + y$ et $y + z$ seront divisibles par Πq, $x + z$ premier à Πq.

6) *Enfin, diviseurs premiers pour lesquels* $\sigma_1 \sigma_2$ *et* σ_3 *sont tous différents de* 0, *et* σ_2 *et* σ_3 *de même signe,*

ce qui donne les facteurs Πr^{γ}, $\Pi r^{\gamma'}$, $\Pi r^{\gamma''}$ dans les expressions de $1 + x^2$, $1 + y^2$ et $1 + z^2$, γ, γ' et γ'' étant des nombres entiers positifs liés par la relation

$$b\gamma' + c\gamma'' = a\gamma$$

et $x + y$ et $x + z$ seront divisibles par Πr, $y + z$ premier à Πr.

On aura ainsi les expressions suivantes

$$1 + x^2 = 2^{\delta_1} . \left[A^b . B^c . \prod p^{\alpha} . \prod q^{\beta} . \prod r^{\gamma} \right]^{\rho_3}$$

$$1 + y^2 = 2^{\delta_2} . \left[A^a . C^c . \prod p^{\alpha'} . \prod q^{\beta'} . \prod r^{\gamma'} \right]^{\rho_2}$$

$$1 + z^2 = 2^{\delta_3} . \left[B^a . C^b . \prod p^{\alpha''} . \prod q^{\beta''} . \prod r^{\gamma''} \right]^{\rho_1}$$

Ces expressions prennent une forme plus simple, si l'on y applique les théorèmes 8 et 9.

On peut distinguer 2 classes de solutions suivant que k sera pair ou impair.

Soit d'abord k pair.

ρ_1 ρ_2 et ρ_3 étant premiers entre eux, l'un d'eux, ρ_1 p. ex. sera pair et les autres impairs, ou tous les trois impairs. Dans le premier cas λ et μ seront pairs, ν impair et pour que $\lambda\delta_1+\mu\delta_2+\nu\delta_3+k$ soit pair, il faut que $\delta_3=0$.

Mais alors, l'expression correspondante de $1+z^2$ devient impossible si $|z|>0$, ρ_1 étant pair (Théorème 9). Ce cas est donc à rejeter.

Il faut donc que ρ_1, ρ_2 et ρ_3 soient tous les trois impairs et si $|x|, |y|$ et $|z|$ sont >1 les expressions correspondantes de $1+x^2$, $1+y^2$ et $1+z^2$ deviennent impossibles (Théorème 8 et 9), à moins que

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3=1.$$

Soit maintenant k impair.

Comme dans le cas précedent, l'un des nombres ρ, ρ_1 p. ex., peut être pair et les deux autres impairs, ou tous les trois impairs. Dans le premier cas, δ_3 sera $=1$ et

$$\rho_1=2^{\chi}, \qquad \rho_2=\rho_3=1$$

et dans le second cas

$$\rho_1=\rho_2=\rho_3=1.$$

Tous les cas possibles de l'équation à 3 termes peuvent alors être résumés dans le théorème suivant

Théorème II.

Étant donnée l'équation indéterminée

$$\lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \mu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z} = k \frac{\pi}{4}$$

où λ, μ, ν *et* k *sont des nombres entiers positifs (ou* $k = 0$*) non tous divisibles par un même diviseur* > 1 *et où aucun des* $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$, $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y}$ *et* $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z}$ *n'est multiple de* $\frac{\pi}{4}$, *toutes les solutions entières* x, y *et* z *de cette équation sont comprises dans les cas suivants:*

1) k *pair ou* $= 0$.

Alors λ, μ *et* ν *seront premiers entre eux et il faut et il suffit,* k *étant indéterminé, que*

$$1 + x^2 = 2^{\delta_1} . A^{\mu} . B^{\nu} . \prod p^{\alpha} . \prod q^{\beta} . \prod r^{\gamma}$$

$$1 + y^2 = 2^{\delta_2} . A^{\lambda} . C^{\nu} . \prod p^{\alpha'} . \prod q^{\beta'} . \prod r^{\gamma'}$$

$$1 + z^2 = 2^{\delta_3} . B^{\lambda} . C^{\mu} . \prod p^{\alpha''} . \prod q^{\beta''} . \prod r^{\gamma''}$$

où δ_1, δ_2 *et* δ_3 *sont* $= 0$ *ou* $= 1$ *et tels que* $\lambda\delta_1 + \mu\delta_2 + \nu\delta_3$ *soit pair; les* p, q *et* r *sous les signes du produit sont des nombres premiers différents entre eux et tous de la forme* $4h + 1$ *et* A, B *et* C *sont des nombres entiers, premiers entre eux et dont tous les diviseurs premiers sont différents des* p, q *et* r, *mais de même forme* $4h + 1$.

Enfin les $\alpha, \alpha', \alpha''$, β, β', β'', $\gamma, \gamma', \gamma''$ *sont des nombres entiers positifs liés par les relations*

$$\lambda\alpha + \mu\alpha' = \nu\alpha''$$
$$\lambda\beta + \nu\beta'' = \mu\beta'$$
$$\mu\gamma' + \nu\gamma'' = \lambda\gamma$$

et

$x + y$ *est divisible par* $A . \prod q . \prod r$ *et premier à* $\prod p$

$x + z$ . . . . $B . \prod p . \prod r$ . . . . . . $\prod q$

$y + z$ . . . . $C . \prod p . \prod q$ . . . . . . $\prod r$

2) k *et deux des nombres* λ, μ *et* ν *impairs.*

Alors λ, μ *et* ν *seront aussi premiers entre eux et les conditions nécessaires et suffisantes deviennent les mêmes que celles du cas précédent, sauf qu'il faut* $\lambda\delta_1 + \mu\delta_2 + \nu\delta_3$ *impair.*

3) k *et l'un des coefficients* λ, μ *et* ν *impairs, les deux autres pairs.*

Avec nouvelles significations des λ, μ *et* ν, *on aura donc une équation de la forme*

$$2^{\varkappa}\lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + 2^{\varkappa}\mu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} = k\frac{\pi}{4}$$

et λ, μ *et* ν *seront premiers entre eux et* $\varkappa$ *sera un nombre entier positif. Alors il faut et il suffit (k restant d'ailleurs indéterminé), que*

$$1 + x^2 = 2^{\delta_1} . A^{\mu} . B^{\nu} . \prod p^{\alpha} . \prod q^{\beta} . \prod r^{\gamma}$$

$$1 + y^2 = 2^{\delta_2} . A^{\lambda} . C^{\nu} . \prod p^{\alpha'} . \prod q^{\beta'} . \prod r^{\gamma'}$$

$$1 + z^2 = 2 \left[B^{\lambda} . C^{\mu} . \prod p^{\alpha''} . \prod q^{\beta''} \prod r^{\gamma''} \right]^{2\varkappa}$$

où les A, B, C, p, q *et* r *ont le même sens qu'auparavant, et la reste de la condition prend la même forme que dans les cas précédents, en y substituant les nouveaux coefficients* λ, μ *et* ν, *sauf que les* δ_1 *et* δ_2 *sont* $= 0$ *ou* $= 1$ *mais arbitraires.*

Il y a lieu de remarquer que z *est alors une solution de l'équation de Pell:*

$$z^2 - 2v^2 = -1$$

et que ses premières valeurs positives sont

1, 7, 41, 239, 1393, 8119, 47321, 275807, ...

Comme on le voit, les expressions de $1 + x^2$, $1 + y^2$ et $1 + z^2$ sont encore d'une forme très-générale et il est difficile d'en tirer des conséquences ultérieures sous cette forme.

Nous allons mentionner une autre forme très simple mais pas si commode pour les applications pratiques.

En effet, considérons les expressions générales sous la forme

$$1+x^2=2^{\delta_1}\left[\prod p_m^{|\sigma_1|}\right]^{\rho_3}$$

$$1+y^2=2^{\delta_2}\left[\prod p_m^{|\sigma_2|}\right]^{\rho_2}$$

$$1+z^2=2^{\delta_3}\left[\prod p_m^{|\sigma_3|}\right]^{\rho_1}$$

où

$$a\sigma_1+b\sigma_2+c\sigma_3=0.$$

Or, dans son livre, *Exercices d'Analyse numérique*, Paris 1859, M. Lebesgue donne la solution complète en nombres entiers ou $=0$ de cette équation lineaire, solution qui peut s'écrire*)

$$\sigma_1=bt+ct'$$
$$\sigma_2=au+cu'$$
$$\sigma_3=av+bv'$$

t, t', u, u', v et v' étant des nombres entiers convenablement choisis ou $=0$.

En substituant ces valeurs, on a

$$\prod p_m^{|\sigma_1|}=\prod p_m^{|bt_m+ct'_m|}=P_1^{\,b}.P_2^{\,c}$$

où P_1 et P_2 sont *des fractions,* ce que l'on voit aisément en examinant les cas différents pour des valeurs positives, négatives ou $=0$ des nombres t_m et t'_m.

De la même manière on aura

$$\prod p_m^{|\sigma_2|}=Q_1^{\,a}.Q_2^{\,c}$$

et

$$\prod p_m^{|\sigma_3|}=R_1^{\,a}.R_2^{\,b}$$

où Q_1, Q_2, R_1 et R_2 sont d'autres fractions, d'où

*) Il faut appliquer son théorème LXI (p. 59), en y posant $z=\sigma_3$ et $z=\sigma_2$ et en remarquant que a, b et c sont premiers entre eux.

$$1 + x^2 = 2^{\delta_1}\left(P_1^{\ b} . P_2^{\ c}\right)^{\rho_3}$$

$$1 + y^2 = 2^{\delta_2}\left(Q_1^{\ a} . Q_2^{\ c}\right)^{\rho_2}$$

$$1 + z^2 = 2^{\delta_3}\left(R_1^{\ a} . R_2^{\ b}\right)^{\rho_1}$$

et en se rappelant les valeurs de ρ_1, ρ_2 et ρ_3, on aura

Théorème 12.

La solution complète en nombres entiers $\lambda, \mu, \nu, x, y, z, k$ *de l'équation*

$$\lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \mu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z} = k \frac{\pi}{4}$$

dépend exclusivement de la solution complète en nombres rationnels a *et* b *des équations des formes*

$$\left.\begin{array}{l} 1 + c^2 = a^m . b^n \\ 1 + c^2 = 2 . a^m . b^n \\ 1 + c^2 = 2 . (a^m . b^n)^{2^\varkappa} \end{array}\right\} \qquad (9)$$

c *étant l'un des nombres* x, y *et* z, m *et* n *des nombres entiers positifs premiers entre eux, et* $\varkappa$ *entier positif.*

§ 7.

Cas particuliers de l'équation à trois termes.

Nous allons considérer quelques cas particuliers, où les formules du théorème II prennent des formes très simples.

a) *Considérons d'abord le cas le plus simple:*

$$\operatorname{arc tg} \frac{1}{x} + \operatorname{arc tg} \frac{1}{y} = \operatorname{arc tg} \frac{1}{z} \tag{11}$$

On a ici

$$\lambda = \mu = \nu = 1, \qquad k = 0$$

et les équations en α, α', α'' etc. deviennent

$$\alpha + \alpha' = \alpha''$$
$$\beta + \beta'' = \beta'$$
$$\gamma' + \gamma'' = \gamma$$

et en posant:

$$\prod p^{\alpha} = P_1, \quad \prod q^{\beta} = Q_1, \quad \prod r^{\gamma'} = R_1$$

$$\prod p^{\alpha'} = P_2, \quad \prod q^{\beta''} = Q_2, \quad \prod r^{\gamma''} = R_2$$

on aura

$$1 + x^2 = 2^{\delta_1} . A . B . P_1 . Q_1 . R_1 R_2$$
$$1 + y^2 = 2^{\delta_2} . A . C . P_2 . Q_1 Q_2 . R_1$$
$$1 + z^2 = 2^{\delta_3} . B . C . P_1 P_2 . Q_2 . R_2$$

Nous ne voulons pas poursuivre plus loin cette analyse. En effet notre équation (11) peut être résolue d'une autre manière directe, que j'ai indiquée dans une réponse dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* T. II, p. 246.

En effet, on a, d'après la formule d'addition des arcs-tangentes

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}=\frac{1}{z}$$

équation qui peut s'écrire

$$(x-z)(y-z)=1+z^2$$

En donnant ici à z une valeur entière tout-à-fait arbitraire et en décomposant $1+z^2$ de toutes les manières possibles en deux facteurs ρ_i et ρ_j, on aura ainsi le système complet des solutions x et y pour cette valeur particulière de z donnée par

$$x=z\pm\rho_i$$

$$y=z\pm\rho_j$$

Si

$$1+z^2=2^{\delta}.p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.\ \ldots\ p_n^{\alpha_n}$$

$p_1, p_2 \ldots p_n$ étant des nombres premiers différents, on voit aisément que l'on aura en tout

$$N=(\delta+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ \ldots\ (a_n+1)$$

solution différentes. N est toujours $\overline{\overline{>}}$ 2.

Il y a donc une infinité des solutions différentes de notre équation à 3 termes dans ce cas simple (11) et à toute valeur entière z correspondent au moins 2 solutions entières x et y.

Prenons pour exemple $z = 7$.

On a alors

$$1 + z^2 = 50 = 2 \cdot 5^2$$

et les $(1 + 1)(2 + 1) = 6$ solutions différentes

$$\begin{array}{ll}
x = 7 - 1 = 6, & y = 7 - 50 = -43 \\
x = 7 + 1 = 8, & y = 7 + 50 = 57 \\
x = 7 - 2 = 5, & y = 7 - 25 = -18 \\
x = 7 + 2 = 9, & y = 7 + 25 = 32 \\
x = 7 - 5 = 2, & y = 7 - 10 = -3 \\
x = 7 + 5 = 12, & y = 7 + 10 = 17
\end{array}$$

On peut même trouver une infinité de cas différents où l'équation (11) sera satisfaite identiquement.

Considérons en effet l'équation

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a+x} = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{ax + x^2 + 1}$$

En donnant ici a une valeur entière déterminée de la forme

$$a = 2^{\delta} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots\ p_n^{\alpha_n}$$

où $\delta = 0$ ou $= 1$ et $p_1, p_2 \ldots p_n$ des nombres entiers de la forme $4h + 1$, on peut toujours trouver un nombre entier x_0 tel que $1 + x_0^2$ soit divisible par a.*) Alors $(az + x_0)^2 + 1$ le sera aussi et a divise alors $a(az + x_0) + (ax + x_0)^2 + 1$ et l'on aura une solution de l'équation pour $x = az + x_0$, et cette expression contenant un entier arbitraire z on aura *une équation identique en z.*

*) Voir: *Serret:* Cours d'Algèbre supérieure 332—340.

Par exemple, si $a = 1, 2, 5, 10$ etc., on aura les identités suivantes

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z^2+z+1}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2z-1} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2z+1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2z^2}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5z-2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5z+3} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5z^2+z-1}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10z-3} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10z+7} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10z^2+4z-4}$$

. . . .

---

b) Nous avons déjà remarqué une liaison entre l'équation à 3 termes et l'équation de Pell $x^2 - 2y^2 = \pm 1$ (Voir théorème 11).

Cette équation peut même donner *une infinité de solutions différentes.* En effet, j'ai trouvé le théorème suivant:

Théorème 13.

$x_1, x_2, \ldots x_m, \ldots, y_1, y_2, \ldots y_m, \ldots$, étant les deux séries infinies de toutes les solutions entières positives et successives de l'équation de Pell $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, on aura

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n-1}} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n+1}} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n}}$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n-1}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n+1}} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y_{2n}}$$

Pour démontrer ce théorème, il faut se rappeler les valeurs bien connues*) de x_m et y_m que l'on tire de l'équation

$$(1+\sqrt{2})^m = x_m + y_m\sqrt{2},$$

en identifiant les quantités rationnelles et irrationnelles aux deux membres.**) On vérifie alors sans difficulté que

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = 2x_{2n} \qquad x_{2n+1}\cdot x_{2n-1} + 1 = x_{2n}^2 - 1$$

$$x_{2n+1} + x_{2n-1} = 4y_{2n} \qquad x_{2n+1}\cdot x_{2n-1} - 1 = 2\,(y_{2n}^2 - 1)$$

ce qui démontre le théorème.

Les premières solutions étant

x	$= 1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ 99,\ 239,\ 577, \ldots$
y	$= 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29,\ 70,\ 169,\ 408, \ldots$

on trouve par exemple:

$$\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$$

$$\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{41} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{17}$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{41} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

*) Voir p. ex.: *Wertheim*, Zahlentheorie § 125.

**) Il y a lieu de remarquer que $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \ldots$ sont aussi les réduites successives de $\sqrt{2}$ développé en fraction continue:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}$$

Il y a un théorème analogue sur l'équation $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, où $D = 1 + \rho^2$, ρ étant entier. En effet, on a:

Théorème 14.

$x_1, x_2, \dots x_m, \dots, y_1, y_2, \dots y_m, \dots$ étant les deux séries infinies de toutes les solutions entières positives et successives de l'équation de Pell $x^2 - (1 + \rho^2) y^2 = \pm 1$, ρ étant entier, on aura

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n-1}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n+1}} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y_{2n}}$$

On le démontre de la même manière, en remarquant que les plus petites solutions entières positives de $x^2 - (1 + \rho^2) y^2 = \pm 1$ sont $x = \rho$, $y = 1$ et que toutes les autres se déduisent de l'équation

$$(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^m = x_m + y_m \sqrt{1 + \rho^2}$$

en identifiant les quantités rationnelles et irrationnelles aux deux membres. On déduit alors aisément

$$x_{2n+1} + x_{2n-1} = 2y_{2n} \sqrt{1 + \rho^2}$$

$$x_{2n+1} \cdot x_{2n-1} - 1 = (y_{2n}^2 - 1) \sqrt{1 + \rho^2}$$

d'où l'on tire le théorème ci-dessus

De l'équation qui définit x_m et y_m, on tire

$$x_m = \frac{(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^m + (\rho - \sqrt{1 + \rho^2})^m}{2}$$

$$y_m = \frac{(\rho + \sqrt{1 + \rho^2})^m - (\rho - \sqrt{1 + \rho^2})^m}{2\sqrt{1 + \rho^2}}$$

et *si l'on définit* x_m *et* y_m *par ces dernières équations pour toutes les valeurs de* ρ, *l'équation*

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n-1}} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_{2n+1}} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y_{2n}}$$

subsiste encore. x_m et y_m sont alors des fonctions entières à coefficients entiers de la variable indépendante ρ, et l'équation aux arcs-tangentes est *une identité entre ces fonctions.* *)

Le cas le plus simple, $n = 1$ donne p. ex.

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\rho} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4\rho^3 + 3\rho} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2\rho}$$

J'ai étendu ces théorèmes à l'équation de Pell générale $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, mais ce n'est pas ici l'endroit d'insister à ce sujet. **)

---

c) *Considérons le cas spécial où* $1 + x^2$ *est un nombre premier ou le double d'un nombre premier.*

Soit donc

$$1 + x^2 = 2^{\delta} \cdot \rho$$

---

*) On est conduit, par cette circonstance, à étudier des *équations fonctionnelles* de la forme:

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} u_1 + c_2 \operatorname{arc\,tg} u_2 + \ldots + c_n \operatorname{arc\,tg} u_n = k\frac{\pi}{4}$$

où $u_1, u_2, \ldots u_n$ sont des fonctions d'une variable indépendante x.

**) Voir une note qui va paraître dans le recueil danois «*Nyt Tidsskrift for Mathematik*».

ρ étant *un nombre premier* de la forme $4h+1$ et $\delta = 0$ ou $\delta = 1$.

En choisissant l'un ou l'autre des nombres A, B, p, q ou r égal à ρ, on aura 5 cas différents:

1) *Prenons d'abord* $A = \rho$.

On aura donc

$$B = p = q = r = 1 \text{ et } \mu = 1$$

et les conditions du théorème 11 prennent la forme:

$$\begin{aligned} 1 + y^2 &= 2^{\delta_2} . \rho^\lambda . C^\nu \\ 1 + z^2 &= 2^{\delta_3} . C \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 1 + y^2 &= 2^{\delta_2} . \rho^\lambda . C^\nu \\ 1 + z^2 &= 2 . C^{2^\varkappa} \end{aligned}$$

et

$x + y$ sera divisible par ρ
$y + z$ C

2) *En posant* $B = \rho$, on aura:

$$A = p = q = r = 1, \qquad \nu = 1$$

et

$$\begin{aligned} 1 + y^2 &= 2^{\delta_2} . C \\ 1 + z^2 &= 2^{\delta_3} . \rho^\lambda . C^\mu \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} 1 + y^2 &= 2^{\delta_2} . C \\ 1 + z^2 &= 2 \left[\rho^\lambda . C^\mu\right]^{2^\varkappa} \end{aligned}$$

et

$x + z$ divisible par ρ
$y + z$ C

3) *Posons* $p=\rho$, d'où

$$A=B=q=r=1\,,\qquad \alpha=1$$

et

$$1+y^2=2^{\delta_2}.\rho^{\alpha'}.C^{\nu} \qquad \text{ou} \qquad 1+y^2=2^{\delta_2}.\rho^{\alpha'}.C^{\nu}$$
$$1+z^2=2^{\delta_3}.\rho^{\alpha''}.C^{\mu} \qquad\qquad 1+z^2=2\left[\rho^{\alpha''}.C^{\mu}\right]^{2^{\chi}}$$

où

$$\lambda+\mu\alpha'=\nu\alpha''$$

et $x+z$ sera divisible par ρ

$y+z$ . . . . ρC

et $x+y$ non divisible par ρ

4) *Posons* $q=\rho$, d'où

$$A=B=p=r=1\,,\qquad \beta=1$$

et

$$1+y^2=2^{\delta_2}.\rho^{\beta'}.C^{\nu} \qquad \text{ou} \qquad 1+y^2=2^{\delta_2}.\rho^{\beta'}.C^{\nu}$$
$$1+z^2=2^{\delta_3}.\rho^{\beta''}.C^{\mu} \qquad\qquad 1+z^2=2\left[\rho^{\beta''}.C^{\mu}\right]^{2^{\chi}}$$

où

$$\lambda+\nu\beta''=\mu\beta'$$

et $x+y$ sera divisible par ρ

$y+z$ . . . . ρC

et $x+z$ non divisible par ρ

Trykt den 10de December 1896.

5) *Posons enfin* $r = \rho$, d'où

$$A = B = p = q = 1, \qquad \gamma = 1$$

et

$$1 + y^2 = 2^{\delta_2} . \rho^{\gamma'} . C^{\nu} \qquad \text{ou} \qquad 1 + y^2 = 2^{\delta_2} . \rho^{\gamma'} . C^{\nu}$$

$$1 + z^2 = 2^{\delta_3} . \rho^{\gamma''} . C^{\mu} \qquad\qquad 1 + x^2 = 2 [\rho^{\gamma''} . C^{\mu}]^{2^{\varkappa}}$$

où

$$\mu\gamma' + \nu\gamma'' = \lambda$$

et $x + y$ sera divisible par ρ
$x + z$ . . . . ρ
$y + z$ . . . . C,

mais non divisible par ρ

Ces conditions remplies, on aura, nous le répétons, une équation de l'une des deux formes

$$\lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \mu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z} = k \frac{\pi}{4}$$

$$2^{\varkappa} \lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + 2^{\varkappa} \mu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z} = k \frac{\pi}{4}$$

où $1 + x^2$ *est un nombre premier ou le double d'un nombre premier.*

Dans ce cas, on voit aussi que *tout se ramène à la solution complète en nombres entiers* ξ *et* η *des équations indéterminées:*

$$1+\xi^2 = \rho^m . \eta^n$$
$$1+\xi^2 = 2 . \rho^m . \eta^n$$

où m et n sont entiers et positifs ou $=0$, et ρ est un nombre premier. En appliquant les théorèmes 8 et 9 on voit aussi que le plus grand diviseur commun des exposants m et n est $=1$ ou égal à une puissance de 2.

Pareil cas se présente, si p. ex. x a les valeurs

2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 16, 19, 20, 24, 25, 26, 29, ...

Considérons comme exemple le cas où $x=6$.

On a

$$1+x^2=37, \qquad \rho=37.$$

Dans les tables des diviseurs des nombres $1+x^2$ de Gauss*) on trouve

$$1+68^2=5^3.37$$
$$1+117^2=2.5.37^2$$

D'un autre côté, on a

$$6+68 = 74 = 2.37$$
$$6-117 = -111 = -3.37$$

et
$$68+117 = 185 = 5.37$$

Par la dernière équation on voit que y et z ont le même signe et que l'on aura le cas 3 ou 4. En posant $y=68$, $z=117$, on aura le cas 4, mais la condition $\lambda+\nu\beta'=\mu\beta''$ ne sera pas satisfaite.

---

*) Voir p. 11.

Il faut donc choisir

$$y = -68, \qquad z = -117$$

et on aura le cas 3.

En identifiant les expressions de $1 + y^2$ et $1 + x^2$ on obtient

$$\begin{array}{llll} \delta_2 = 0, & \alpha' = 1, & \mu = 1, & C = 5 \\ \delta_3 = 1, & \alpha'' = 2, & \nu = 3 & \end{array}$$

ce qui donne

$$\lambda + 1 \,.\, 1 = 2 \,.\, 3$$

ou

$$\lambda = 5$$

et l'équation des arcs-tangentes prend la forme

$$5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{6} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{68} - 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{117} = k \frac{\pi}{4}$$

et l'on vérifie aisément que $k = 1$, d'où

$$5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{6} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{68} - 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{117} = \frac{\pi}{4}$$

Des cas simples s'obtiennent aussi, quand

$$1 + x^2 = p^\alpha . q^\beta$$

ou

$$1 + x^2 = 2 . p^\alpha . q^\beta$$

p et q étant des nombres premiers, ou quand $1 + z^2$ est égal au double du carré ou du bicarré d'un nombre premier.

Pareil cas se présente p. ex. pour

$$x = 8,\ 12,\ 13,\ 18,\ 21,\ 22,\ 23,\ 27,\ 28,\ 30,\ \ldots\ 50,\ \ldots\ 70,\ \ldots\ 80,\ \ldots\ 100\ \ldots\ 500,\ \ldots$$

et pour

$$z = 7,\ 41,\ 239\ \ldots$$

Il y a encore un cas très simple, savoir celui-ci:

$$1 + x^2 = 2^{\delta_1} . p^{m_1} . q^{n_1}$$

$$1 + y^2 = 2^{\delta_2} . p^{m_2} . q^{n_2}$$

$$1 + z^2 = 2^{\delta_3} . p^{m_3} . q^{n_3}$$

où p, q et r sont des nombres premiers. Si les exposants sont tels que l'élimination de p et q puisse être effectuée, on aura toujours une équation aux arcs-tangentes à 3 termes, comme nous allons le faire voir avec plus de détail dans le § 9.

§ 8.

Classification des solutions de l'équation à 3 termes. Solutions propres et impropres. Tableau des solutions.

Comme nous l'avons vu, les solutions de l'équation à 3 termes se distribuent en deux classes, selon que k est pair (ou $= 0$) ou impair.

Si $k = 0$, on aurait en certains cas une infinité de solutions différentes comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent.

Considérons le cas le plus intéressant, celui où $k \gtrless 0$. Toutes les solutions de ce genre donnent des développements de π en 3 séries et il serait très-curieux de trouver pour x, y et z les valeurs les plus grandes possibles donnant les séries les plus rapidement convergentes et les plus commodes pour l'évaluation numérique de ce nombre.

Mais, on n'a certainement pas besoin d'nne exactitude du nombre π plus grande que celle déjà trouvée; en effet, comme on le sait, M. Schanks a calculé ce nombre avec l'approximation énorme de 707 décimales.*) L'interêt des nouvelles formules consisterait alors à vérifier ces calculs et faire voir la supériorité de la nouvelle formule de calcul.

*) Voir: *Proceedings of the Royal Society of London*, XXII; *Zeitschrift d'Hoffmann*, 1895, t. XXVI, p. 263, ou *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. II, p. 398. M. Schanks a employé la formule de Machin.

Cependant des solutions si grandes auraient un certain intérêt théorique au point de vue de la théorie des nombres.

Introduisons ici la notion d'*une solution propre* et *impropre:*

Une solution de l'équation

$$\lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}+\mu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}+\nu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z}=k\frac{\pi}{4} \qquad k \gtrless 0$$

sera appelée *solution impropre* ou *propre,* selon que l'un des nombres x, y et z aura les valeurs

$$\pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 5, \quad \pm 7, \quad \pm 239$$

ou non.

En effet, nous avons vu que ces valeurs sont les seules que satisfassent à l'équation à deux termes

$$m \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}+n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}=k\frac{\pi}{4}$$

et l'un des nombres x, y et z satisfera alors *simultanément* à ces deux équations, si l'on a une solution impropre, mais ne le fera jamais pour une solution propre.

Considérons d'abord les solutions impropres.

En remarquant que les solutions de l'équation à deux termes sont

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$$

$$4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tb}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

on voit que l'on peut toujours éliminer les $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$, $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}$ et $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$ à l'aide de ces équations, de sorte que toutes les solutions impropres peuvent être trouvées en résolvant complètement les deux équations

$$\lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \mu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} = k\frac{\pi}{4}$$

$$\lambda \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \mu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} = k\frac{\pi}{4}$$

où k est entier ou $= 0$.

En remarquant que

$$1 + 2^2 = 5, \qquad 1 + 5^2 = 2 \cdot 13,$$

on voit que les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces équations soient remplies se déduisent des conditions spéciales dans le § 7, en y substituant pour le nombre premier p les valeurs 5 et 13.

Le recherche de toutes les solutions impropres dépend alors exclusivement de l'étude des équations indéterminées des formes:

$$1 + \xi^2 = 5^m \cdot \eta^n \qquad \text{et} \qquad 1 + \xi^2 = 13^m \cdot \eta^n$$

$$1 + \xi^2 = 2 \cdot 5^m \cdot \eta^n \qquad\qquad 1 + \xi^2 = 2 \cdot 13^m \cdot \eta^n$$

où m et n sont des nombres entiers positifs ou nuls, dont le plus grand diviseur commun est $= 1$ ou égal à une puissance de 2.

En voici quelques exemples numériques:

1) Dans les tables de GAUSS on trouve

$$1 + 27^2 = 2 \cdot 5 \cdot 73$$

$$1 + 1068^2 = 5^6 \cdot 73$$

et $1068 + 27$ étant divisible par $5 \cdot 73$, $1068 + 2$ par 5, on aura le cas 3 et par conséquent

$$y = 27, \quad z = 1068, \quad \alpha' = 1, \quad \alpha'' = 6, \quad \nu = \mu = 1 \text{ et } \lambda = \alpha'' - \alpha = 5$$

et l'on vérifie aisément que $k = 3$, d'où

$$5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{27} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1068} = 3 \frac{\pi}{4}$$

---

2) Nous avons

$$1 + 11^2 = 2 \cdot 61$$

$$1 + 682^2 = 5^3 \cdot 61^2$$

et $682 - 2$ étant divisible par 5, mais non par 61 et $682 - 11$ divisible par 61, on se trouve dans le cas 2 et

$$y = 11, \quad z = -682, \quad C = 61, \quad \lambda = 3, \quad \mu = 2, \quad \nu = 1;$$

on aura donc

$$3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{11} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{682} = \frac{\pi}{2}$$

---

3) On a

$$1 + 577^2 = 2 \cdot 13^2 \cdot (5 \cdot 197)$$

$$1 + 1393^2 = 2 \cdot (5 \cdot 197)^2$$

et $577 + 1393$ étant divisible par $5 \cdot 197$ et $577 - 5$ par 13 on aura le cas 2 et par suite

$$y = -577, \quad z = -1393, \quad C = 5 \cdot 197, \quad \lambda = 2, \quad \nu = 1, \quad \mu = 1, \quad 2^{\varkappa} = 2$$

d'où

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{577} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1393} = \frac{\pi}{4}$$

Cet exemple est remarquable, parcequ' il est presque le seul qui ne rentre pas dans les cas traités au paragraphe 9.

Trykt den 19de December 1896.

Je donnerai une table de toutes les *solutions impropres* que j'ai trouvées pour l'équation à 3 termes:

x	y	z	λ	μ	ν	k
2	4	13	1	1	1	1
2	5	8	1	1	1	1
2	6	— 117	1	2	1	1
2	— 6	43	2	1	1	1
2	— 8	— 57	2	1	1	1
2	— 5	18	2	1	1	1
2	— 9	— 32	2	1	1	1
2	— 12	— 17	2	1	1	1
2	— 14	1393	2	2	1	1
2	— 17	— 41	2	2	1	1
2	— 12	41	2	2	1	1
2	13	38	3	2	1	2
2	5	— 57	3	1	1	2
2	8	18	3	1	1	2
2	6	68	3	1	1	2
2	11	— 682	3	2	1	2
2	8	239	4	4	1	3
2	43	— 117	5	2	1	3
2	18	— 57	5	1	1	3
2	23	— 182	5	1	1	3
2	26	— 2057	5	1	1	3
2	27	1068	5	1	1	3
2	28	443	5	1	1	3
2	43	68	5	1	1	3

x	y	z	λ	μ	ν	k
2	68	117	5	2	1	3
2	18	— 239	8	4	1	5
2	— 57	239	12	4	1	7
3	4	— 38	1	2	1	1
3	6	— 43	2	1	1	1
3	8	57	2	1	1	1
3	5	— 18	2	1	1	1
3	9	32	2	1	1	1
3	12	17	2	1	1	1
3	14	— 1393	2	2	1	1
3	17	41	2	2	1	1
3	12	— 41	2	2	1	1
3	— 13	— 38	3	2	1	1
3	— 5	57	3	1	1	1
3	— 8	— 18	3	1	1	1
3	— 6	— 68	3	1	1	1
3	— 8	— 239	4	4	1	1
3	— 43	117	5	2	1	2
3	— 18	57	5	1	1	2
3	— 23	182	5	1	1	2
3	— 26	2057	5	1	1	2
3	— 27	— 1068	5	1	1	2
3	— 28	— 443	5	1	1	2
3	— 43	— 68	5	1	1	2
3	— 68	— 117	5	2	1	2

x	y	z	λ	μ	ν	k
3	— 11	682	3	2	1	2
3	— 18	239	8	4	1	3
3	57	— 239	12	4	1	5
5	8	57	2	3	1	1
5	8	— 18	3	2	1	1
5	— 240	— 57361	4	1	1	1
5	— 238	56883	4	1	1	1
5	— 241	— 28800	4	1	1	1
5	— 237	28322	4	1	1	1
5	— 352	— 4633	4	1	1	1
5	— 226	4155	4	1	1	1
5	— 265	— 2436	4	1	1	1
5	— 213	1958	4	1	1	1
5	— 408	— 577	4	1	1	1
5	— 70	99	4	1	1	1
5	— 70	41	4	2	1	1
5	— 41	99	4	1	2	1
5	— 408	1393	4	2	1	1
5	— 577	— 1393	4	2	1	1
5	— 478	54608393	4	2	1	1
5	— 18	— 57	5	3	2	1
— 7	4	— 38	1	4	2	1
7	4	13	1	2	2	1
7	5	8	1	2	2	1

x	y	z	λ	μ	ν	k
7	6	— 117	1	4	2	1
7	8	239	2	4	1	1
7	13	38	3	4	2	1
7	5	— 57	3	2	2	1
7	8	18	3	2	2	1
7	6	68	3	2	2	1
7	11	— 682	3	4	2	1
7	18	— 239	4	4	1	1
7	43	— 117	5	4	2	1
7	18	— 57	5	2	2	1
7	23	— 182	5	2	2	1
7	26	— 2057	5	2	2	1
7	27	1068	5	2	2	1
7	28	443	5	2	2	1
7	43	68	5	2	2	1
7	68	117	5	4	2	1
7	— 57	239	6	4	1	1
— 239	4	— 21	1	4	4	1
— 239	6	31	1	4	4	1
— 239	10	— 515	1	8	4	1
239	8	57	1	6	2	1
239	8	— 18	3	8	4	1
— 239	18	57	5	12	8	1 (Gauss)

En tout 96 solutions impropres, mais certainement en existe il d'autres où les nombres sont plus grands. Si l'on avait p. ex. des tables de diviseurs des nombres $1 + x^2$ plus complètes que celles de GAUSS, qui ne donnent que les diviseurs premiers jusqu'à 197, je suis sur que l'on trouverait des solutions nouvelles.

Comme *solutions propres* je n'ai trouvé que les 6 suivantes:

$$3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{13} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{38} = \frac{\pi}{4}$$

$$3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{20} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1985} = \frac{\pi}{4}$$

$$5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{6} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{43} - 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{117} = \frac{\pi}{4}$$

$$5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{6} - 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{43} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{68} = \frac{\pi}{4}$$

$$5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{6} - 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{117} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{68} = \frac{\pi}{4}$$

$$5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{18} + 3 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57} = \frac{\pi}{4}$$

Mais il est très probable qu'il en existe d'autres plus grandes.

En résumé, j'ai trouvé ainsi 102 solutions différentes de l'équation à 3 termes, quand k est different de 0.

Il se présente ici un problème très intéressant, mais fort difficile, ce me semble:

Cette équation à 3 termes a-t-elle ou non une infinité des solutions différentes, quand k n'est pas nul? *)

*) Pour ma part, je crois qu'elle en a un nombre fini.

Dans le premier cas, on aurait des développements de π en 3 series aussi convergentes que l'on voudrait, ce qui serait très remarquable.

Dans l'autre cas, on aurait, comme à l'équation à deux termes, un nombre fini de solutions différentes et il serait donc très intéressant de les trouver toutes.

Pour obtenir des formules élégantes et extrémement commodes pour l'évaluation numérique de π, il serait très curieux de trouver des solutions, où l'un des nombres x, y et z serait p. ex. égal à

$$50, \quad 100, \quad 200, \quad 500, \quad \ldots$$

et les deux autres plus grands.

En remarquant, que:

$$\begin{aligned} 1 + 50^2 &= 41 . 61 \\ 1 + 100^2 &= 73 . 137 \\ 1 + 200^2 &= 13 . 17 . 181 \\ 1 + 500^2 &= 53^2 . 89 \end{aligned}$$

on trouve aisément les formes simplifiées prises dans ces cas par les conditions générales du théorème 11.

Il y a lieu de remarquer une condition qui doit être satisfaite, quand x, y et z deviennent grands. Si $k \gtreqless 1$ on aura

$$\lambda \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} + \mu \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{z} \gtreqless \frac{\pi}{4}$$

et arc tg $\left|\frac{1}{x}\right|$ étant $< \left|\frac{1}{x}\right|$ etc., $\left|\frac{1}{x}\right|$ désignant la valeur absolue de $\frac{1}{x}$, on aura

$$\left|\frac{\lambda}{x}\right| + \left|\frac{\mu}{y}\right| + \left|\frac{\nu}{z}\right| > \frac{\pi}{4} \tag{12}$$

Quand x, y et z croissent, il faut donc que les coefficients λ, μ et ν fassent de même *et les exposants correspondants dans les expressions de* $1 + x^2$, $1 + y^2$ *et* $1 + z^2$ *croîtront généralement aussi.*

Si le plus grand des coefficients λ, μ, ν est $= n$ et le plus petit des nombres $|x|$, $|y|$ et $|z|$ est $= a$, l'équation (12) donne:

$$3\frac{n}{a} > \frac{\pi}{4}$$

d'où

$$n > 0{,}41 \, . \, a$$
$$a < 2{,}4 \, . \, n$$

Si, p. ex., les nombres $|x|$, $|y|$ et $|z|$ sont tous > 10, 20, 50, 100, le plus grand des coefficients λ, μ et ν sera dans ces cas respectifs plus grand que 4, 8, 20, 41, et *vice versa,* si p. ex. tous les coefficients λ, μ, ν sont < 10, 20, 50, 100, il faut que l'un des nombres x, y et z ait une valeur absolue < 24, 48, 120, 240 etc.

Remarque. *)

Après l'impression du paragraphe 5 il m'est arrivé **) une réponse à la question que j'avais posée dans *l'Intermédiaire des Mathématiciens* (T. III, p. 101) au sujet de l' irréductibilité de l'équation mentionnée p. 34.

En effet, M. Palmström à Bergen (Norvège) a démontré très élégamment que la proposition mentionnée en cet endroit est exacte.

Les théorèmes 5 et 10 donnent alors immédiatement:

Théorème 15.

φ étant égal à $\frac{\pi}{4}$ ou à un arc dont la tangente ou la cotangente est un nombre entier, l'équation algébrique qui détermine tg $\frac{\varphi}{n}$ à l'aide de tg φ, sera irréductible, si n est un nombre premier.

---

*) Cette remarque eût dû être jointe au § 5; mais l'impression de cette partie de mon travail étant achevée, je suis forcé de la placer ici.

**) Voir T. III, p. 263.

Trykt den 19de December 1896.

§ 9.

Sur la note de Gauss. Des arcs primitifs. Théorèmes généraux. Methode d'élimination. Exemples numériques.

Comme nous l'avons dit, la petite note de 3 pages contenue dans les œuvres complètes de Gauss contient un abrégé de quelques développements trouvés dans ses manuscrits posthumes.

Ces développements prennent leur point de départ dans la décomposition d'un nombre entier complexe en ses diviseurs premiers. Par cette décomposition il a trouvé les équations aux arcs-tangentes correspondantes et d'un système de pareilles équations il en déduit d'autres par élimination. Le but principal de ses calculs est d'exprimer des arcs dont les tangentes sont rationnelles, par un nombre très limité d'arcs fondamentaux et calculer ensuite ces arcs fondamentaux à l'aide de nouvelles équations très-commodes. Pour trouver autant de décompositions que possible, Gauss a dans ce but calculé ses tables de diviseurs de nombres $1+x^2$, $4+x^2$, $\ldots$ $81+x^2$. (Voir Gauss, Werke II, p. 478.)

La note ne contient que les résultats de ces développements; nous allons en donner le précis, en les démontrant et en les complétant.

Comme nous l'avons dit dans le § 1, chaque nombre entier complexe peut être décomposé en un produit d'un nombre fini de nombres premiers complexes et cette décomposition est unique aux diviseurs ± 1, $\pm i$ près.

De plus, si le nombre complexe avait la forme $A + iB$, A et B étant premiers entre eux, tous ses diviseurs premiers auraient la forme $u + iv$, $u^2 + v^2$ étant $= 2$ ou égal à un nombre premier réel de la forme $4h + 1$.

Posons alors

$$A + iB = \varepsilon (1 + i)^{\delta} (u_1 \pm iv_1)^{c_1} (u_2 \pm iv_2)^{c_2} \ldots (u_n \pm iv_n)^{c_n}$$

où ε est une unité, $\delta = 0$ ou $= 1$, $c_1, c_2 \ldots c_n$ des nombres entiers positifs et les nombres u et v tous positifs, $u > v$ et $u^2 + v^2$ un nombre premier de la forme $4h + 1$.

Alors, $(A + iB)(A - iB)$ étant réel, on aura (§ 2):

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A} = k \frac{\pi}{2} + \delta \frac{\pi}{4} \pm c_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{v_1}{u_1} \pm \ldots \pm c_n \operatorname{arc\,tg} \frac{v_n}{u_n}$$

où le nombre k est indéterminé.

Comme on le sait, $\operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}$ a une infinité de valeurs différant les unes des autres de multiples de π. En donnant alors à $\operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}$ une valeur déterminée, on fixe aussi k et la décomposition du nombre $A + iB$ étant unique aux diviseurs ± 1, $\pm i$ près, *on arrive à l'unique décomposition:*

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A} = \nu_0 \frac{\pi}{4} + \nu_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{v_1}{u_1} + \nu_2 \operatorname{arc\,tg} \frac{v_2}{u_2} + \ldots + \nu_n \operatorname{arc\,tg} \frac{v_n}{u_n}$$

où les coefficients $\nu_0, \nu_2 \ldots \nu_n$ sont des nombres entiers positifs ou négatifs ou $= 0$, parfaitement déterminés pour chaque $\operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}$.

Nous introduisons ici pour $\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$ une notation analogue à celle appliquée aux nombres premiers:

Nous appelons arc primitif) un arc* $\overline{\overline{<}}\ \frac{\pi}{4}$, *dont la tangente est* $=\frac{v}{u}$, *u et v étant des nombres entiers positifs,* $u \overline{\overline{>}} v$ *et* $u^2+v^2=2$ *ou égal à un nombre premier de la forme* $4h+1$.

L'arc primitif le plus simple est alors $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{1}=\frac{\pi}{4}$ et tous les autres se déduisent *des décompositions connues en deux carrés des nombres premiers de la forme* $4h+1$. Ces décompositions étant uniques comme on le sait, il n'y a qu'*un* arc premier pour chaque nombre premier.

Par exemple, les décompositions

$$5=2^2+1,\quad 13=3^2+2^2,\quad 17=4^2+1^2,\quad 29=5^2+2^2,\ \ldots$$

donnent les arcs primitifs correspondants:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2},\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3},\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{4},\quad \operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5},\ \text{etc.}\ldots$$

Par cette nouvelle notation, la décomposition indiquée plus haut donne lieu au théorème fondamental:

*) Cette notation n'est pas employée par GAUSS.

Théorème 16.*)

Tout arc dont la tangente est rationnelle peut s'exprimer linéairement à coefficients entiers par un nombre fini d'arcs primitifs, et cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.

A l'aide de ce théorème on peut donner au théorème 1 une forme très simple, où les décompositions des nombres a^2+b^2 en diviseurs premiers sont remplacées par celles des $\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ en arcs primitifs. Nous avons en effet:

Théorème 17.**)

Pour que les nombres entiers $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_n$ satisfassent à l'équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{b_1}{a_1} + c_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{b_2}{a_2} + \ldots + c_n \operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{a_n} = 0$$

$c_1, c_2 \ldots c_n$ étant des nombres entiers, il faut et il suffit que

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b_1}{a_1} = \nu_0^{(1)}\varphi_0 + \nu_1^{(1)}\varphi_1 + \ldots + \nu_\rho^{(1)}\varphi_\rho = \sum_{k=0}^{\rho}\nu_k^{(1)}\varphi_k$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b_2}{a_2} = \nu_0^{(2)}\varphi_0 + \nu_1^{(2)}\varphi_1 + \ldots + \nu_\rho^{(2)}\varphi_\rho = \sum_{k=0}^{\rho}\nu_k^{(2)}\varphi_k$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{a_n} = \nu_0^{(n)}\varphi_0 + \nu_1^{(n)}\varphi_1 + \ldots + \nu_\rho^{(n)}\varphi_\rho = \sum_{k=0}^{\rho}\nu_k^{(n)}\varphi_k$$

---

*) et **) Ces théorèmes ne se trouvent pas dans GAUSS.

où $\varphi_0 \varphi_1 \ldots \varphi_n$ *sont des arcs primitifs différents entre eux et* $\nu_k^{(1)}, \nu_k^{(2)}, \ldots \nu_k^{(n)}$ *des nombres entiers ou nuls assujettis à la relation*)*

$$c_1 \nu_k^{(1)} + c_2 \nu_k^{(2)} + \ldots + c_n \nu_k^{(n)} = 0$$
$$(k = 1, 2, \ldots \rho)$$

Il y a un cas intéressant de ce théorème, savoir celui, où le nombre des arcs primitifs est égal au nombre des $\operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$ ou moindre que ce nombre. Alors on peut en général exprimer ces premiers comme fonctions linéaires à coefficients rationnels des derniers et ce sont là les cas que Gauss a traités dans sa note. En effet, il a considéré des équations de la forme

$$\nu_0^{(1)} \varphi_0 + \nu_1^{(1)} \varphi_1 + \ldots + \nu_{n-1}^{(1)} \varphi_{n-1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_1}$$
$$\nu_0^{(2)} \varphi_0 + \nu_1^{(2)} \varphi_1 + \ldots + \nu_{n-1}^{(2)} \varphi_{n-1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\nu_0^{(n)} \varphi_0 + \nu_1^{(n)} \varphi_1 + \ldots + \nu_{n-1}^{(n)} \varphi_{n-1} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_n}$$

Si le déterminant des coefficients ν au premier mêmbre est $\gtrless 0$, on en tire pour les arcs primitifs $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1}$ des expressions en fonctions linéaires à coefficients rationnels des $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_1}$, $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_2}$, $\ldots$ $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_n}$ et si l'on peut trouver des nombres $x_1, x_1 \ldots x_n$ très grands, l'évaluation numérique des arcs primitifs φ sera très facile.

---

*) Il faut remarquer que les (1), (2), ... (n) sont ici des indices, et non des exposants.

Comme exemple, GAUSS déduit les expressions des arcs primitifs correspondants aux nombres premiers 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61 et dont les tangentes sont 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{7}$, et $\frac{5}{6}$, par des $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$, où x a les valeurs

5257, 9466, 12943, 34208, 44179, 85353, 114669, 330182 et 485298.

En suivant cette méthode, on obtient les valeurs numériques des arcs primitifs les plus simples et alors, le calcul des arcs qui peuvent s'exprimer par ces arcs primitifs devient très simple.

Voilà le but principal des calculs de GAUSS. C'est pourquoi il a calculé ses tables de diviseurs. Ces tables contenant les diviseurs premiers jusqu'à 197, elles suffisent pour calculer tous les arcs primitifs corréspondant aux nombres premiers $\leqq$ 197.

La méthode de GAUSS suppose que *l'on a déterminé complètement les décompositions en nombres premiers complexes des nombres $x+i$ correspondants.* Ces calculs sont assez pénibles si x est grand, parceque il faut examiner une foule de divisibilités des expressions $vx \pm u$ (§ 1).

S'il s'agit seulement de trouver des équations de la forme

$$c_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_1} + c_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_2} + \ldots + c_n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_n} = k\frac{\pi}{4}$$

la méthode se peut simplifier considérablement de la manière suivante:

Supposons qu'on a trouvé:

$$\mathrm{I} + x_1^2 = 2^{\delta_1} . p_1^{|\nu_1^{(1)}|} \dots p_\rho^{|\nu_\rho^{(1)}|} \dots p_{n-1}^{|\nu_{n-1}^{(1)}|}$$

$$\mathrm{I} + x_2^2 = 2^{\delta_2} . p_1^{|\nu_1^{(2)}|} \dots p_\rho^{|\nu_\rho^{(2)}|} \dots p_{n-1}^{|\nu_{n-1}^{(2)}|}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathrm{I} + x_n^2 = 2^{\delta_n} . p_1^{|\nu_1^{(n)}|} \dots p_\rho^{|\nu_\rho^{(n)}|} \dots p_{n-1}^{|\nu_{n-1}^{(n)}|}$$

où $p_1 \dots p_\rho \dots p_{n-1}$ sont des nombres premiers différents entre eux et les $|\nu|$ des exposants entiers ou $= \mathrm{o}$ de telle manière, que deux au moins des exposants d'un même nombre premier p_ρ soient $> \mathrm{o}$.

Prenons dans la série

$$\nu_\rho^{(1)}, \quad \nu_\rho^{(2)} \quad \dots \quad \nu_\rho^{(\lambda)} \quad \dots \quad \nu_\rho^{(n)}$$

un nombre quelconque qui soit différent de o *et choisissons le positif. On peut p. ex. prendre le premier qui n'est pas* $= \mathrm{o}$; supposons que ce soit $\nu_\rho^{(\lambda)}$.

Appelons $u_\rho + iv_\rho$ le diviseur premier complexe du nombre correspondant $x_\rho + i$, x_ρ étant positif. u_ρ et v_ρ sont donc des nombres entiers positifs ou négatifs et $u_\rho^2 + v_\rho^2$ est $= p_\rho$.

Cela posé, nous choisissons un autre $\nu_\rho^{(\mu)}$, différent de o, *positif*, si $x_\mu + i$ est divisible par $u_\rho + iv_\rho$ et *négatif* si $x_\mu - i$ est divisible par ce nombre, ou, ce qui revient au même:

prenons $\nu_\rho^{(\mu)}$ *positif ou négatif, selon que* $x_\lambda - x_\mu$ *ou* $x_\lambda + x_\mu$ *sera divisible par* p_ρ, $|\nu_\rho^{(\mu)}|$ *étant* $> \mathrm{o}$.

Il est bon de remarquer que si $x_\lambda - x_\mu$ n'est pas divisible par p_ρ, $|\nu_\rho^{(\lambda)}|$ et $|\nu_\rho^{(\mu)}|$ étant > 0, $x_\lambda + x_\mu$ le sera, ce qui est une conséquence immédiate de ce que $x_\lambda^2 - x_\mu^2$ est divisible par p_ρ.

Comme on le voit aisément, on aura alors:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x_1} + k_1\frac{\pi}{4} = \nu_1^{(1)}\operatorname{arctg}\frac{v_1}{u_1} + \ldots + \nu_\rho^{(1)}\operatorname{arctg}\frac{v_\rho}{u_\rho} + \ldots + \nu_{n-1}^{(1)}\operatorname{arctg}\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$$

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x_1} + k_2\frac{\pi}{4} = \nu_1^{(2)}\operatorname{arctg}\frac{v_1}{u_1} + \ldots + \nu_\rho^{(2)}\operatorname{arctg}\frac{v_\rho}{u_\rho} + \ldots + \nu_{n-1}^{(2)}\operatorname{arctg}\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$$

. . . .

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x_n} + k_n\frac{\pi}{4} = \nu_1^{(n)}\operatorname{arctg}\frac{v_1}{u_1} + \ldots + \nu_\rho^{(n)}\operatorname{arctg}\frac{v_\rho}{u_\rho} + \ldots + \nu_{n-1}^{(n)}\operatorname{arctg}\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}},$$

où $k_1, k_2 \ldots k_n$ sont des nombres entiers ou $= 0$ et $\frac{v_1}{u_1} \ldots \frac{v_{n-1}}{u_{n-1}}$ des fractions analogues aux $\frac{v_\rho}{u_\rho}$.

Mais ceci donne par élimination des $\operatorname{arc\,tg}\frac{v}{u}$:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_1} + k_1\frac{\pi}{4} & \nu_1^{(1)} & \nu_2^{(1)} & \ldots & \nu_{n-1}^{(1)} \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_2} + k_2\frac{\pi}{4} & \nu_1^{(2)} & \nu_2^{(2)} & \ldots & \nu_{n-1}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_\lambda} + k_\lambda\frac{\pi}{4} & \nu_1^{(\lambda)} & \nu_2^{(\lambda)} & \ldots & \nu_{n-1}^{(\lambda)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x_n} + k_n\frac{\pi}{4} & \nu_1^{(n)} & \nu_2^{(n)} & \ldots & \nu_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

et l'on aura une éqnation de la forme:

$$c_1 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_1} + \dots + c_\lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_\lambda} + \dots + c_n \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x_n} = k\frac{\pi}{4},$$

k étant entier ou $= 0$ et

$$c_\lambda = (-1)^{\lambda+1} \cdot \begin{vmatrix} \nu_1^{(1)} & \nu_2^{(1)} & \dots & \nu_{n-1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_1^{(\lambda-1)} & \nu_2^{(\lambda-1)} & \dots & \nu_{n-1}^{(\lambda-1)} \\ \nu_1^{(\lambda+1)} & \nu_2^{(\lambda+1)} & \dots & \nu_{n-1}^{(\lambda+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \nu_1^{(n)} & \nu_2^{(n)} & \dots & \nu_{n-1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

Pour le calcul pratique, il est bon de former le tableau des nombres ν comme il suit

	p_1	p_2	p_3	...
x_1	$\nu_1^{(1)}$	$\nu_2^{(1)}$	$\nu_3^{(1)}$	...
x_2	$\nu_1^{(2)}$	$\nu_2^{(2)}$	$\nu_3^{(2)}$	...
x_3	$\nu_1^{(3)}$	$\nu_2^{(3)}$	$\nu_3^{(3)}$	...
x_4	$\nu_1^{(4)}$	$\nu_2^{(4)}$	$\nu_3^{(4)}$	...
...	...	...	...	...

Ici, nous le répétons, ν *est* $= 0$, *si l'exposant* $|\nu|$ *est* $= 0$, *et, dans une colonne verticale, le premier* $\nu_\rho^{(\lambda)}$ *des* ν_ρ *qui n'est pas* $= 0$ *est positif et un autre* $\nu_\rho^{(\mu)}$ *dans la même colonne positif ou négatif selon que* $x_\lambda - x_\mu$ *ou* $x_\lambda + x_\mu$ *sera divisible par* p_ρ.

Nous allons appliquer cette méthode à quelques exemples numériques*):

1) Nous avons

$$\begin{aligned} 1 + 18^2 &= 5^2 . 13 \\ 1 + 57^2 &= 2 . 5^3 . 13 \\ 1 + 239^2 &= 2 . 13^4 \end{aligned}$$

et comme $18 + 57$ est divisible par 5, $57 - 18$, $239 - 18$ divisibles par 13, on aura le tableau:

	5	13	
18	2	1	
57	−3	1	
239	0	4	

d'où:

$$c_1 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -12, \quad c_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8, \quad c_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

et l'on voit aisément que le coefficient k de $\frac{\pi}{2}$ est $= -1$, d'où

$$12 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{18} + 8 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57} - 5 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

formule qui a aussi été trouvée par GAUSS.

2) Dans les tables de diviseurs de GAUSS on trouve:

$$\begin{aligned} 1 + 22^2 &= 5 . 97 \\ 1 + 41^2 &= 2 . 29^2 \\ 1 + 75^2 &= 2 . 29 . 97 \\ 1 + 4193^2 &= 2 . 5^5 . 29 . 97 \end{aligned}$$

*) J'ai aussi vérifié tous ces exemples par un calcul direct.

et comme $4193 + 22$ est divisible par 5, $75 + 41$ et $4193 - 75$ divisibles par 29, $75 + 22$ et $4193 + 75$ par 97, on aura le tableau suivant:

	5	29	97	
22	1	0	1	
41	0	2	0	
75	0	-1	-1	
4193	-5	-1	1	

et l'on trouve

$$c_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \qquad c_1 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \qquad c_4 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

On voit aisément que le coefficient de $\frac{\pi}{4}$ est $= 1$ et l'on aura:

$$10 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{22} + 7 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{41} + 12 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{75} + 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{4193} = \frac{\pi}{4}$$

3) On a

$$\begin{aligned} 1 + 57^2 &= 2 \cdot 5^3 \cdot 13 \\ 1 + 239^2 &= 2 \cdot 13^4 \\ 1 + 682^2 &= 5^3 \cdot 61^2 \\ 1 + 12943^2 &= 2 \cdot 5^4 \cdot 13^3 \cdot 61 \end{aligned}$$

et comme $682 - 57$ et $12943 + 57$ sont divisibles par 5, $239 - 57$ et $12943 + 57$ par 13 et $12943 - 682$ par 61, on aura le tableau suivant:

	5	13	61
57	3	1	0
239	0	4	0
682	3	0	2
12943	-4	-3	1

et l'on trouve la formule:

$$44 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{57} + 7 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} - 12 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{682} + 24 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{12943} = \frac{\pi}{4}$$

4) Le système

$$\begin{aligned} 1 + 172^2 &= 5 \,.\, 61 \,.\, 97 \\ 1 + 239^2 &= 2 \,.\, 13^4 \\ 1 + 682^2 &= 5^3 \,.\, 61^2 \\ 1 + 5357^2 &= 2 \,.\, 5^2 \,.\, 61 \,.\, 97^2 \\ 1 + 12943^2 &= 2 \,.\, 5^4 \,.\, 13^3 \,.\, 61 \end{aligned}$$

donne de la même manière:

$$88 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{172} + 51 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} + 32 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{682} + 44 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5357} + 68 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{12943} = \frac{\pi}{4}$$

Dans le cas très-simple

$$1 + x^2 = 2^{\delta_1} . p^{m_1} . q^{n_1}$$

$$1 + y^2 = 2^{\delta_2} . p^{m_2} . q^{n_2}$$

$$1 + z^2 = 2^{\delta_3} . p^{m_3} . q^{n_3}$$

où p et q sont des nombres premiers, cette méthode donne, comme on le voit, presque immédiatement l'équation correspondante à 3 termes:

$$\lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} + \mu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y} + \nu \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{z} = k \frac{\pi}{4}.$$

k sera impair, et par conséquent, *toujours* $\gtrless 0$, si $\delta_1 \lambda + \delta_2 \mu + \delta_3 \nu$ est impair (voir le théorème 10), ou, ce qui revient au même, si

$$\delta_1 \begin{vmatrix} m_2 & n_2 \\ m_3 & n_3 \end{vmatrix} + \delta_2 \begin{vmatrix} m_3 & n_3 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} + \delta_3 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}$$

est impair.

J'ai appliqué cette méthode à toutes les équations de ce genre que l'on trouve dans les tables des $1 + x^2$ de Gauss, mais ces tables ne contiennent que les diviseurs premiers jusqu'à 197, et on trouverait certainement des solutions nouvelles. si l'on avait des tables plus complètes..

On est conduit par cette méthode à trouver toutes les solutions $x, \nu_1, \nu_2 \ldots \nu_n$ de l'équation :

$$1 + x^2 = 2^{\delta} . p_1^{\nu_1} . p_2^{\nu_2} . \ldots . p_n^{\nu_n}$$

δ étant $=0$ ou $=1$ et $p_1, p_2 \dots p_n$ étant des *nombres premiers donnés.*

Il me semble que cette équation n'a qu'un nombre fini de solutions x pour chaque système des nombres premiers $p_1, p_2 \dots p_n$. Mais la démonstration de ce théorème me semble être bien difficile.

D'après ce qui précède on peut conclure que, s'il existe $n+\rho$ solutions différentes

$$x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1} \dots x_{n+\rho},$$

il y a en général une équation à coefficients entiers entre $n+1$ quelconques des arc tg $\frac{1}{x}$ et $\frac{\pi}{4}$, et ρ des arcs peuvent en général s'exprimer linéairement à coefficients rationnels en fonction des n arcs restants et de $\frac{\pi}{4}$.

§ 10.

Liaison analogue entre la théorie des nombres complexes de la forme $a+b\sqrt{-3}$, a et b étant entiers, et les solutions rationnelles $x_1\, x_2 \ldots x_n$ de l'équation:

$$c_1 \operatorname{arc\,tg}\left(x_1\sqrt{3}\right)+c_2 \operatorname{arc\,tg}\left(x_2\sqrt{3}\right)+\ldots+c_n \operatorname{arc\,tg}\left(x_n\sqrt{3}\right)=k\frac{\pi}{6}$$

Extension aux nombres complexes supérieurs.

De même que nous avons fait intervenir la théorie des nombres entiers complexes de la forme $a+ib$ dans la théorie des solutions entières $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_n$ de l'équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{b_1}{a_1}+c_2 \operatorname{arc\,tg}\frac{b_2}{a_2}+\ldots+c_n \operatorname{arc\,tg}\frac{b_n}{a_n}=k\frac{\pi}{4} \qquad (1)$$

on pourra aussi appliquer la théorie des nombres entiers complexes p. ex. de la forme $a+b\sqrt{-3}$ aux solutions entières de l'équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b_1}{a_1}\sqrt{3}\right)+c_2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b_2}{a_2}\sqrt{3}\right)+\ldots+c_n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b_n}{a_n}\sqrt{3}\right)=k\frac{\pi}{6}$$

En effet, $\frac{\pi}{6}$ étant $= \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}$, on voit d'après le § *2*, que la condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit satisfaite, aux multiples de $\frac{\pi}{2}$ près, est que le produit

$$(3-\sqrt{3})^k \cdot (a_1+b_1\sqrt{-3})^{c_1} \cdot (a_2+b_2\sqrt{-3})^{c_2} \ldots (a_n+b_n\sqrt{-3})^{c_n}$$

soit réel ou purement imaginaire.

Ce produit étant lui-même un nombre de la forme $A+B\sqrt{-3}$, A *et* B *étant entiers, la théorie de ces nombres s'appliquera ici avec autant de succès que la théorie des nombres* $a+ib$ *à l'équation plus simple* (1).

La théorie des nombres $a+b\sqrt{-3}$ étant très analogue à celle des nombres $a+ib$, on retrouve des théorèmes analogues à presque tous les théorèmes énumérés précédemment dans ce mémoire; mais ce n'est pas ici l'endroit de les développer.

Par exemple, on trouve

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{6} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{45} = \frac{\pi}{6}$$

$$2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\pi}{2}$$

etc.

La même méthode peut s'appliquer si l'on veut trouver les solutions entières $a_1 \ldots a_n$, $b_1 \ldots b_n$ d'une équation

$$c_1 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b_1}{a_1}\sqrt{D}\right) + \ldots + c_n \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b_n}{a_n}\sqrt{D}\right) = k\frac{\pi}{2}$$

où D est positif et non égal à un carré.

Trykt den 21de December 1896.

Il faut donc faire l'application de la théorie des nombres $a + b\sqrt{-D}$. Cette théorie ayant une liaison intime avec *les formes quadratiques* $a^2 + Db^2$, *on aura ainsi une liaison étroite entre cette dernière théorie et les solutions de l'équation ci-dessus.*

Ces considérations peuvent être considérablement généralisées et extendues aux nombres complexes supérieurs.

En effet, prenons un autre point de départ et faisons d'abord l'application à un cas simple.

Nous avons

$$\log \text{nat} (x + y\sqrt{-D}) = \log \text{nat} (x^2 + Dy^2) + i\left[\text{arc tg} \frac{y}{x}\sqrt{D} + 2k\pi\right]$$

Introduisons ici les racines α_1 et α_2 de l'équation quadratique

$$z^2 + D = 0.$$

On aura donc

$$\log \text{nat} (x + \alpha_1 y) = F_0 (x,y) + \alpha_1 F_1 (x,y)$$
$$\log \text{nat} (x + \alpha_2 y) = F_0 (x,y) + \alpha_2 F_1 (x,y)$$

en posant:

$$F_0 (x,y) = \log \text{nat} (x^2 + Dy^2)$$

$$F_1 (x,y) = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \left[\text{arc tg} \frac{y}{x}\sqrt{D} + 2k\pi\right]$$

Soit maintenant donnée une décomposition:

$$A + B\sqrt{-D} = (a_1 + b_1\sqrt{-D})^{c_1} (a_2 + b_2\sqrt{-D})^{c_2} \ldots (a_n + b_n\sqrt{-D})^{c_n}$$

d'où

$$A + \alpha B = (a_1 + \alpha b_1)^{c_1} (a_2 + \alpha b_2)^{c_2} \dots (a_n + \alpha b_n)^{c_n}$$

ce qui est vrai pour toutes les deux racines $\alpha_1 = \sqrt{-D}$ et $\alpha_2 = -\sqrt{-D}$ de l'équation $z^2 + D = 0$. En prenant les logarithmes, on aura avec les notations nouvelles

$$F_0(A, B) + \alpha F_1(A, B) = \sum_{\rho=1}^{n} c_\rho F_0(a_\rho, b_\rho) + \alpha \sum_{\rho=1}^{n} c_\rho F_1(a_\rho, b_\rho)$$

et, cette équation ayant lieu pour toutes les deux racines α, il faut que

$$F_0(A, B) = \sum_{\rho=1}^{n} c_\rho F_0(a_\rho, b_\rho)$$

$$F_1(A, B) = \sum_{\rho=1}^{n} c_\rho F_1(a_\rho, b_\rho)$$

ou

$$\log \text{nat} (A^2 + DB^2) =$$

$$= c_1 \log \text{nat} (a_1^2 + Db_1^2) + \dots + c_n \log \text{nat} (a_n^2 + Db_n^2)$$

et

$$\text{arc tg} \frac{B}{A} \sqrt{D} =$$

$$= c_1 \text{ arc tg} \left(\frac{b_1}{a_1} \sqrt{D}\right) + \dots + c_n \text{ arc tg} \left(\frac{b_n}{a_n} \sqrt{D}\right) + 2k\pi$$

et l'on déduit ainsi d'une décomposition du nombre complexe $A + B\sqrt{-D}$ une équation aux arcs tangentes en prenant les logarithmes.

Généralisons cette méthode.

Soient $\alpha_0\,\alpha_1\,\ldots\,\alpha_{n-1}$ les racines d'une équation algébrique irréductible à coefficients entiers:

$$z^n + Pz^{n-1} + Qz^{n-2} + \ldots + Rz + S = 0.$$

Soient $F_0\,F_1\,\ldots\,F_{n-1}$ des fonctions des quantités $x_0\,x_1\,\ldots\,x_{n-1}$ déterminées par:

$$F_0 + \alpha_0 F_1 + \alpha_0^2 F_2 + \ldots + \alpha_0^{n-1} F_{n-1} =$$
$$= \log\operatorname{nat}(x_0 + \alpha_0 x_1 + \alpha_0^2 x_2 + \ldots + \alpha_0^{n-1} x_{n-1})$$

$$F_0 + \alpha_1 F_1 + \alpha_1^2 F_2 + \ldots + \alpha_1^{n-1} F_{n-1} =$$
$$= \log\operatorname{nat}(x_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_1^2 x_2 + \ldots + \alpha_1^{n-1} x_{n-1})$$

. . . .

$$F_0 + \alpha_{n-1} F_1 + \alpha_{n-1}^2 F_2 + \ldots + \alpha_{n-1}^{n-1} F_{n-1} =$$
$$= \log\operatorname{nat}(x_0 + \alpha_{n-1} x_1 + \alpha_{n-1}^2 x_2 + \ldots + \alpha_{n-1}^{n-1} x_{n-1})$$

Or, si l'on a

$$M_0 + \alpha M_1 + \alpha^2 M_2 + \ldots + \alpha^{n-1} M_{n-1} = N_0 + \alpha N_1 + \alpha^2 N_2 + \ldots + \alpha^{n-1} N_{n-1}$$

pour toutes les racines α, $M_0 M_1 \ldots N_{n-1}$ étant des quantités quelconques, il faut que

$$M_0 = N_0,\quad M_1 = N_1,\ \ldots\ M_{n-1} = N_{n-1}.$$

En effet, les équations peuvent s'écrire

$$(M_0 - N_0) + \alpha_0 (N_1 - N_1) + \ldots + \alpha_0^{n-1} (M_{n-1} - N_{n-1}) = 0$$

$$(M_0 - N_0) + \alpha_1 (M_1 - N_1) + \ldots + \alpha_1^{n-1} (M_{n-1} - N_{n-1}) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(M_0 - N_0) + \alpha_{n-1} (M_1 - N_1) + \ldots + \alpha_{n-1}^{n-1} (M_{n-1} - N_{n-1}) = 0$$

Mais, le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \ldots & \alpha_0^{n-1} \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = \pm \begin{array}{r} (\alpha_0 - \alpha_1)(\alpha_0 - \alpha_2)(\alpha_0 - \alpha_3) \ldots (\alpha_0 - \alpha_{n-1}) \\ (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \ldots (\alpha_1 - \alpha_{n-1}) \\ (\alpha_2 - \alpha_3) \ldots (\alpha_2 - \alpha_{n-1}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}) \end{array}$$

étant différent de 0, parceque l'équation qui détermine les α n'a pas de racines égales, le système des n équations linéaires homogènes en $M - N$ ne peut pas être satisfait, à moins que

$$M_0 = N_0 \qquad M_1 = N_1 \qquad \ldots \qquad M_{n-1} = N_{n-1}$$

c. q. f. d.

Cela posé, supposons que l'on ait trouvé pour le nombre complexe

$$A = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^2 A_2 + \ldots + \alpha^{n-1} A_{n-1}$$

$A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ étant des nombres entiers, une décomposition de la forme

$$A = a^p . b^q \ldots c^r$$

où

$$a = a_0 + \alpha a_1 + \alpha^2 a_2 + \ldots + \alpha^{n-1} a_{n-1}$$

$$b = b_0 + \alpha b_1 + \alpha^2 b_2 + \ldots + \alpha^{n-1} b_{n-1}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$c = c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \ldots + \alpha^{n-1} c_{n-1}$$

$a_0 a_1 \ldots c_{n-1}$ étant aussi des nombres entiers et α étant la même racine que dans l'expression de A.

Supposons que cette décomposition a lieu pour toutes les racines α. En prenant les logarithmes on aura

$$\log \operatorname{nat} A = p \log \operatorname{nat} a + q \log \operatorname{nat} b + \ldots + r \log \operatorname{nat} c$$

et en introduisant les fonctions $F_0 F_1 \ldots F_{n-1}$ il vient:

$$\begin{aligned}
& F_0(A_0 A_1 .. A_{n-1}) + \alpha F_1(A_0 A_1 \ldots A_{n-1}) + \ldots + \alpha^{n-1} F_{n-1}(A_0 A_1 \ldots A_{n-1}) = \\
= \quad & p F_0(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) + q F_0(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}) + \ldots + r F_0(c_0 c_1 \ldots c_{n-1}) + \\
+ \quad \alpha & \left[p F_1(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) + q F_1(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}) + \ldots + r F_1(c_0 c_1 \ldots c_{n-1}) \right] + \\
& \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
+ \alpha^{n-1} & \left[p F_{n-1}(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) + q F_{n-1}(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}) + .. + r F_{n-1}(c_0 c_1 \ldots c_{n-1}) \right]
\end{aligned}$$

Cette équation aura lieu pour toutes les racines α, et par conséquent les coefficients des mêmes puissances de α aux deux membres seront égaux.

La décomposition du nombre complexe A *entraine ainsi les* n *équations fonctionnelles suivantes, où les quantités* $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ $a_0 a_1 \ldots c_{n-1}$ *sont des nombres entiers:*

$$F_0(A_1 A_2 \ldots A_{n-1}) =$$
$$pF_0(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) + qF_0(b_0 b_1 \ldots a_{n-1}) + \ldots + rF_0(c_0 c_1 \ldots c_{n-1})$$
$$F_1(A_0 A_1 \ldots A_{n-1}) =$$
$$pF_1(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) + qF_1(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}) + \ldots + rF_1(c_0 c_1 \ldots c_{n-1})$$

. . . .

$$F_{n-1}(A_0 A_1 \ldots A_{n-1}) =$$
$$pF_{n-1}(a_0 a_1 \ldots a_{n-1}) + qF_{n-1}(b_0 b_1 \ldots b_{n-1}) + \ldots + rF_{n-1}(c_0 c_1 \ldots c_{n-1})$$

Telle est la liaison étroite qui existe entre la théorie des nombres complexes supérieurs et la théorie des fonctions $F_0 F_1 \ldots F_{n-1}$, déduites de la fonction logarithmique.

On peut ainsi transporter à ces fonctions $F_0 F_1 \ldots F_{n-1}$ les propositions fondamentales relatives aux nombres complexes supérieurs comme nous l'avons fait dans ce mémoire a propos des arcs-tangentes.

Réciproquement, si l'on pouvait retrouver ces propositions sur les fonctions $F_0 F_2 \ldots F_{n-1}$ *indépendamment* de la théorie des nombres complexes supérieurs, on aurait une source nouvelle et importante pour l'étude de cette théorie si ardue.

Christiania, Mars 1896.

ERRATA:

Page	30,	ligne	9,	au lieu de	*premier à k*	lisez	*premier à* A
„	43,	—	5,	—„—	*k pair*	—	*k pair ou* $= 0$
„	58,	—	5,	—„—	$1 + x^2$	—	$1 + z^2$
„	68,	—	11,	—„—	352	—	252

MINDRE MEDDELELSER II.

AF

AXEL THUE

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1897

Mindre meddelelser.

II.

I.

Et bevis for at primtallenes antal er uendeligt.

SATS.

Er $(1+n)^k < 2^n$, *da findes der mindst* $k+1$ *primtal, som ikke er større end* 2^n.

Fandtes der nemlig ikke saa mange primtal, der ikke var større end 2^n, da vilde hvert af de 2^n tal:

$$1, 2, 3, \ldots, 2^n$$

have formen:

$$2^{x_1} . 3^{x_2} \ldots p^{x_n}$$

hvor

$$\begin{aligned} 0 &\leqq x_1 \leqq n \\ 0 &\leqq x_2 < n \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 &\leqq x_n < n \end{aligned}$$

idet 2, 3, ..., p er samtlige de α primtal, der ikke er større end 2^n.

Dette er imidlertid umuligt, saalænge

$$\alpha < k + 1,$$

da antallet af samtlige forskjellige tal med ovennævnte produktform bliver lig eller mindre end

$$(1 + n)^\alpha \leqq (1 + n)^k < 2^n$$

Tilbage staar nu blot at paavise, at der til ethvert opgivet k altid lader sig bestemme saadanne tal n, at

$$(1 + n)^k < 2^n$$

Sættes t. ex.

$$n = 2k^2,$$

da bliver, som man strax ser,

$$(1 + n)^k < 2^n$$

eller:

Der findes mindst $k + 1$ primtal, der ikke er større end

$$4^{k^2}$$

Ved at anvende ovenstaaende raisonnement paa talrækken, naar alle med 2 delelige tal er fjernet, faar man:

Sats.

Er $(n + 1)^k < 3^n$, da findes der mindst $k + 1$ ulige primtal mindre end $2 . 3^n$.

Fortsættes paa denne vis, kan man finde mængden af primtal under en given grænse med større og større tilnærmelse.

Vi bemerker, at man efter den angivne fremgangsmaade naar hurtigere maalet, om primtal af formen $a + ib$ ogsaa medtages.

II

Løsning af en klasse ubestemte ligninger.

Sats.

Er $F(a_1\, a_2 \ldots a_p)$ *et helt tal, naar* $a_1\, a_2 \ldots a_p$ *er hele tal, da vil, om en ubestemt ligning kan bringes paa formen*

$$F(x_1 \ldots x_p) = F(y_1 \ldots y_p)$$

denne altid være løsbar i hele tal x, y, *saafremt der findes flere end* k *forskjellige systemer* $a_1 \ldots a_p$, *for hvilke* $F(a_1 \ldots a_p)$ *ligger mellem grænser, hvis differents ikke overstiger* k.

Paa anvendelsen af denne sats, hvis rigtighed er umiddelbart indlysende, skal vi anføre et par exempler.

1. Ligningen:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + y_4^3$$

er altid løsbar i hele tal $x\,y$ over enhver opgiven grænse k, selv om systemet $x_1 \ldots x_4$ skal være forskjelligt fra systemet $y_1 \ldots y_4$.

Der findes nemlig flere end

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}$$

forskjellige systemer $a_1 \ldots a_4$, der tilfredsstiller betingelserne:

$$\begin{gathered} k < a_1 \leqq k+n \\ k < a_2 \leqq k+n \\ k < a_3 \leqq k+n \\ k < a_4 \leqq k+n \end{gathered}$$

$$4k^3 < a^1_3 + a_2^3 + a^3_3 + a_4^3 < 4(n+k)^3$$

Heraf satsen, da n jo kan vælges saa stor, at

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} > 4\left[(n+k)^3 - k^3\right]$$

2. Er u antallet af alle udtryk $a^2 - b^2$, hvor

$$0 < a^2 - b^2 < k^2$$

$$b > h$$

da vil, naar h er én vilkaarlig opgiven størrelse, k kunne gjøres saa stor, at

$$\frac{u}{k^2}$$

voxer over alle grænser. Dette følger blandt andet deraf, at arealet mellem en hyperbel og dens assymptoter er uendeligt.

Vælges k saa stor, at $u > k^2$, faar man altsaa flere end k^2 positive udtryk $a^2 - b^2$, der er mindre end k^2.

Vi faar med andre ord mindst en løsning i hele tal

$$a_{,}^2 - b_{,}^2 = a_{,,}^2 - b_{,,}^2$$

eller

$$a_{,}^2 + b_{,,}^2 = a_{,,}^2 + b_{,}^2$$

hvor alle tal er større end det vilkaarlig opgivne tal h.

III.

En løsning af den ubestemte ligning

$$x^2 - Dy^2 = m.$$

Dette problem reduceres paa løsningen af den Pell'ske ligning ved følgende theorem gjældende for positivt m.

Sats.

Den mindste positive værdi af y *i ligningen:*

$$x^2 - Dy^2 = m$$

er lig eller mindre end $v \cdot \sqrt{m}$, *naar* v *er et positivt tal tilfredsstillende ligningen:*

$$u^2 - Dv^2 = 1$$

hvor D *ikke er noget kvadrattal og* $u > 1$.

Var nemlig $y > v . \sqrt{m}$, saa blev

$$y^2 > v^2 m$$
$$(u^2 - Dv^2) y^2 > v^2 m$$
$$u^2 y^2 > v^2 (Dy^2 + m)$$
$$uy - v . \sqrt{Dy^2 + m} > 0$$

Paa den andeu side er

$$uy^2 > y^2$$
$$2uy^2 + v^2 m > 2y^2$$
$$2uy^2 + v^2 m > (u^2 - Dv^2) y^2 + y^2$$
$$y^2 (u^2 - 2u + 1) < v^2 m + Dv^2 y^2$$
$$y (u - 1) < v \sqrt{Dy^2 + m}$$

eller

$$0 < uy - v \sqrt{Dy^2 + m} < y$$

Men dette er umuligt, da man i modsat fald paa grund af identiteten

$$\left[Dvy - u \sqrt{Dy^2 + m} \right]^2 - D \left[uy - v \sqrt{Dy^2 + m} \right]^2 = m$$

fik en endnu mindre positiv værdi af $y > 0$, der tilfredsstillede ligningen

$$x^2 - Dy^2 = m$$

Blev ligningen ikke tilfredsstillet af noget $y > 0$ og $\leqq v . \sqrt{m}$, hvor

$$u^2 - Dv^2 = 1,$$

da var den umulig.

Der existerer saaledes t. ex. ingen hele tal x og y for hvilke

$$x^2 - 3y^2 = 2.$$

I modsat fald fandtes der jo en løsning xy, hvor $y \leqq 1 . \sqrt{2}$, da

$$2^2 - 3 . 1^2 = 1.$$

IV.

Et par bemerkninger vedrørende det Fermat'ske problem.

I dette spørgsmaal gjælder det, som bekjendt, at afgjøre, hvorvidt ligningen $a^n - b^n = c^n$ er løsbar i hele tal a, b, c, naar n er et helt tal > 2.

Vi skal i denne forbindelse opstille nogle sætninger.

Sats.

Er n *et helt tal* > 2, *da existerer der ingen ligning*

$$L^n_{(x)} - M^n_{(x)} = N^n_{(x)}$$

i hele funktioner L, M, N *af* x *gjældende for alle værdier af argumentet med mindre*

$$aL = bM = cN$$

hvor a, b, c *er konstanter.*

I enhver ligning

$$L^n - M^n = N^n$$

hvor funktionerne L, M, N ikke har konstante forhold, kan man forudsætte, at hvilkesomhelst to af disse er uden nogen fælles rod ρ.

Var nemlig saa tilfælde, blev ρ ogsaa rod i den tredie funktion og ligningen altsaa divisibel med $(x - \rho)^n$.

Paa denne maade kunde man saa fortsætte et begrænset antal gange uden at samtlige de tre funktioner derved blev reduceret til konstanter.

Dette vilde jo stride mod vore forudsætninger.

Af alle de af vore ligninger, hvori de tre funktioner er uden nogen fælles rod eller funktionsdivisor, kan man nu udtage en, hvis tilhørende udtryk L . M . N har den mindst mulige grad > 0.

I denne ligning

$$\varphi_{,}^n - \varphi_{,,}^n = \varphi_{,,,}^n$$

kau t. ex. graden af $\varphi_{,,,}$ forudsættes ikke at være mindre end graden af $\varphi_{,}$ og $\varphi_{,,}$.

Man faar:

$$(\varphi_{,} - \alpha^0\varphi_{,,})(\varphi_{,} = \alpha^1\varphi_{,,})(\varphi_{,} - \alpha^2\varphi_{,,}) \ldots (\varphi_{,} - \alpha^{n-1}\varphi_{,,}) = \varphi_{,,,}{}^n$$

hvor α er en vilkaarlig primitiv rod i

$$x^n = 1.$$

I produktet kan ingen faktor $\varphi_{,} - \alpha^h\varphi_{,,}$ have nogen rod fælles med en anden faktor $\varphi_{,} - \alpha^k\varphi_{,,}$, da dette vilde medføre, at

$$(\varphi_{,} - \alpha^h\varphi_{,,}) - (\varphi_{,} - \alpha^k\varphi_{,,}) = (\alpha^k - \alpha^h)\varphi_{,,}$$

og

$$\alpha^k(\varphi_{,} - \alpha^h\varphi_{,,}) + \alpha^h(\varphi_{,} - \alpha^k\varphi_{,,}) = (\alpha^k - \alpha^h)\varphi_{,}$$

fik en fælles rod.

Vi har altsaa:

$$\varphi_{,} - \alpha\varphi_{,,} = \psi_{,}{}^n$$
$$\varphi_{,} - \beta\varphi_{,,} = \psi_{,,}{}^n$$
$$\varphi_{,} - \gamma\varphi_{,,} = \psi_{,,,}{}^n$$

hvor $\psi_{,} \psi_{,,}$ og $\psi_{,,,}$ er hele funktioner uden nogen fælles rod og α, β, γ tre vilkaarlige n'te rødder af enheden.

Ved at eleminere $\varphi_{,}$ og $\varphi_{,,}$ mellem de tre ligninger, faar vi

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \psi_{,}{}^n \\ 1 & \beta & \psi_{,,}{}^n \\ 1 & \gamma & \psi_{,,,}{}^n \end{vmatrix} = 0$$

eller

$$(\sqrt{\gamma - \beta} \,.\, \psi_{,})^n - (\sqrt{\gamma - \alpha} \,.\, \psi_{,,})^n = (\sqrt{\alpha - \beta} \,.\, \psi_{,,,})^n$$

Men dette er umuligt, da de tre ligninger maa kunne udvælges saaledes, at graden af $\psi_{,}.\psi_{,,}.\psi_{,,,}$ bliver > 0 og samtidig mindre end graden af $\varphi_{,}.\varphi_{,,}.\varphi_{,,,}$, eftersom jo graden af $\varphi_{,}$ og $\varphi_{,,}$ ikke begge kan være lig 0.

Hermed er satsen bevist.

Paa samme maade faar man, at ligningen:

$$A^n - B^n = C^m$$

er umulig i hele funktioner A, B, C

1. Saafremt n og m har en fælles faktor $d > 2$. Ligningen antog jo da formen

$$a^d - b^d = c^d.$$

2. Saafremt n og m er > 2 og A og B ikke har nogen fællès rod.

Kan bevises paa samme maade som da $m = n$.

3. Saafremt n og m er > 2 og $n > m$.

I dette tilfælde kunde man paa grund af 2. gaa ud fra, at A og B havde en største fælles faktor z, saaledes altsaa, at C^m blev delelig med z^n eller n delelig med m, hvorved man fik igjen første tilfælde.

Vi skal saa give et par exempler paa ovenstaaende betragtninger anvendt paa hele Tal istedetfor paa hele funktioner:

Være

$$a - b = P^n$$
$$a - \alpha b = Q^n$$
$$a - \beta b = R^n$$

hvor α og β er primitive rødder i $x^3 = 1$.

Vi faar da:

$$R^n + \alpha P^n + \beta Q^n = 0$$

og

$$a = \frac{Q^n - \alpha P^n}{1 - \alpha}$$
$$b = \frac{Q^n - P^n}{1 - \alpha}$$

der indsat i

$$a^3 - b^3 = (P\,Q\,R)^n$$

giver

$$\left(\frac{Q^n - \alpha P^n}{1 - \alpha}\right)^3 - \left(\frac{Q^n - P^n}{1 - \alpha}\right)^3 = (P\,Q\,R)^n$$

Sættes heri

$$\alpha P^n = A^n$$
$$\beta Q^n = -B^n$$
$$R^n = -C^n$$

faar man følgende

Sats.

Er

$$A^n - B^n = C^n \tag{I}$$

saa bliver

$$[A^n + \alpha B^n]^3 - [\alpha A^n + B^n]^3 = (\alpha - 1)^3 (A\,B\,C)^n \tag{II}$$

Ombytter man nu i disse to ligninger A^n, B^n, C^n henholdsvis med D^3, E^3, n^3F^n, da faar man af ligningen:

$$D^3 - E^3 = u^3F^n \tag{III}$$

den nye

$$[D^3 + \alpha F^3]^3 - [\alpha D^3 + E^3]^3 = [(\alpha - 1)DEu]^3 F^n \tag{IV}$$

Indsætter vi endelig for D, E, u og F i III og IV

$$\begin{aligned} D &= p^n + \alpha q^n \\ E &= \alpha p^n + q^n \\ u &= \alpha - 1 \\ F &= pqr \end{aligned}$$

saa falder, mærkværdig nok, α ganske bort af ligning IV, medens III gaar over i II.

Vi faar med andre ord følgende

Sats.

Er

$$p^n - q^n = r^n \tag{V}$$

da bliver

$$\begin{aligned} &[p^{3n} + 3p^{2n}q^n - 6p^nq^{2n} + q^{3n}]^3 - [p^{3n} - 6p^{2n}q^n + 3p^nq^{2n} + q^{3n}]^3 = \\ &\qquad = [3(p^{2n} - p^nq^n + q^{2n})]^3(pqr)^n \end{aligned} \tag{VI}$$

Er den Fermat'ske ligning

$$p^n - q^n = r^n$$

mulig i hele tal, da er det samme ogsaa tilfælde med ligningen

$$R^3 - S^3 = T^3U^n \tag{VII}$$

hvor

$$R - S = 9U^n$$

og

$$9(A^2 + RS + S^2) = T^3.$$

Ved i V og VI at ombytte p^n, q^n og r^n henholdsvis med

$$a^3, \; b^3, \; v^3 f^n$$

kommer vi til formler, der leder til uendelig mange løsninger af ligning VII, saa snart en er bekjendt.

Man mærke sig følgende løsning af den Fermat'ske ligning

$$1^n + \alpha^n + \beta^n = 0$$

$$0 < n \gtrless 2,$$

hvor α og β er de primitive rødder i $x^3 = 1$.

Existerer der en ligning af formen

$$F[U_{,}(a,b,c), U_{,,}(a,b,c), U_{,,,}(a,b,c)] = (a^n + b^n + c^n) Q(a,b,c)$$

mvor $U_{,} U_{,,} U_{,,,}$ er hele funktioner med hele koefficienter i størrelserne a, b, c og $F(U_{,} U_{,,} U_{,,,})$ er en hel funktion med hele koeffficienter i størrelserne U, da følger heraf umuligheden af den Fermat'ske ligning

$$a^n + b^n + c^n = 0$$

i hele tal a b c, saafremt ligningen

$$F(x, y, z) = 0$$

ikke er mulig i hele tal x y z.

Exempel:

$$F(x, y, z) \equiv x^3 + y^3 + z^3$$

V.

Nogle mekaniske sætninger.

Sats.

Udgaar n *pillinier fra samme punkt, da gaar deres resultant gjennem pilespidsernes tyngdepunkt, saaledes at dens længde bliver det* n *dobbelte af afstanden mellem det nævnte tyngdepunkt* T *og pilliniernes angrebspunkt* P.

Sidste og første del af satsen erholdes ved henholdsvis at projecere samtlige pillinier paa P T og paa en paa samme lodret linie.

Som bekjendt er jo resultantens projektion lig den algebraiske sum af komponenternes projektioner.

Gaar man ud fra, at kræfter kan sammensættes efter parallelogramloven, og at en lukket flade kun udsat for et over hele fladen konstant (gas) tryk altid er i ligevægt, da giver ovenstaaende sats øieblikkelig en bestemmelse af afstanden x fra en cirkelbues eller kuglekalots tyngdepunkt til dens centrum.

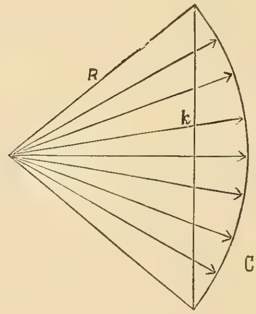


Fig. I.

Er R radien, og k henholdsvis korden eller grundfladen samt b henholdsvis buen eller kalotten, da faar man for begge tilfælde:

$$k \, . \, R = b \, . \, x$$

Er altsaa α cirkelbuens halve centralvinkel og h kalottens høide, faaes henholdsvis

$$x = \frac{\sin \alpha}{\alpha} R$$

og

$$x = R - \frac{h}{2}$$

Beliggenheden af en cirkelbues eller cylinderspirals tyngdepunkt kan ogsaa bestemmes ad dynamisk vei ved d'Alemberts princip eller bedre ved tyngdepunktsloven.

Denne udtaler, at et legemes tyngdepunkt bevæger sig som om al masse her var koncentreret og alle paa legemet virkende ydre kræfter parallelforflyttet did.

Roterer nu en cirkelring uden ydre paavirkning om sin axe med den konstante rotationshastighed ω, da bliver paa grund af symetrien spændingen S i hvert punkt af samme en konstant.

Udskjærer man altsaa af cirkelen en vilkaarlig bue med centralvinkel $= 2\varphi$, da faar vi efter tyngdepunktsloven, idet δ er massen af kubikenheden

$$\delta \, 2\varphi \, R \, . \, \frac{(x \, \omega)^2}{x} = 2 \, S \sin \varphi$$

Trykt den 8de Marts 1897.

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{\delta\,R\,\omega^2}{S}\,.\,x$$

Sættes t. ex.

$$\varphi = 0$$

faaes

$$1 = \frac{\delta\,R\,\omega^2}{S}\,.\,R$$

eller

$$x = \frac{\sin\varphi}{\varphi}\,.\,R$$

SATS.

Er paa hosstaaende bevægelige stangsystem med led i B, C, D og E punkterne A og C samt A og D dragne mod hinanden ved kræfter, der henholdsvis er afbildet ved og proportionale med længderne AC og AD, da vil de to kræfter k i A og E, der holder stangsystemet i ligevægt, for enhver form af det foranderlige stangsystem være konstante og afbildet ved det uforanderlige stykke AB.

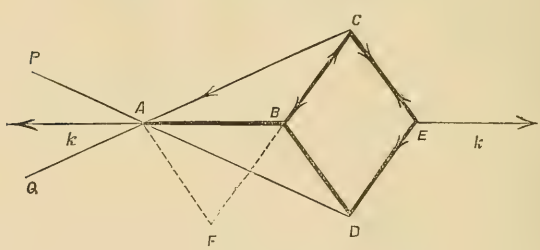


Fig. II.

Dette under forudsætning af, at BCDE er en rombe, og at A, B og E er tvungne til at ligge paa samme rette linie.

Er nemlig $AF \mathrel{\#} CE$ og $CF \mathrel{\#} CB$, saa repræsenterer i krafttrianglet ACF CF trykspændingen i CB og AF strækspændingen i CE. Da endvidere $FB \mathrel{\#} ED$, saa repræsenteres i krafttrianglet AFB den ubekjendte kraft k ved den konstante længde AB.

Er P og Q tvungne til at ligge henholdsvis paa linierne AD og AC, saaledes at $PA = AQ =$ konst, da vil man ved at forbinde P og D samt Q og C ved elastiske snore, der i slap tilstand har længderne PA, erholde kraftvirkninger mellem A og C samt A og D af den ovenfor nævnte art.

Falder C i D bliver k ubestemt. Falder derimod E i B, vil stængerne BC og BD knuses.

Sats.

Er i romben abcd, med bevægelige led i de fire hjørner, a og c samt b og d dragne sammen af kræfter, hvis størrelse er proportionale med og afbildet ved diagonalerne ac og bd, da vil dette stangsystem være i ligevægt.

Lader man nemlig spændingerne i de fire stænger være lige store og efter den valgte maalestok afbildet ved deres længder, da bliver hvert led i ligevægt, eftersom de hertil svarende kraftpolygoner er lukkede triangler.

Sats.

Er i hosstaaende figur III leddene B og C samt E og H forbundne ved elastiske strik, der i slap tilstand er kongruente, da har de to kræfter k, der holder stangsystemet i ligevægt en konstant værdi.

Figuren forudsættes her at bestaa af to kongruente leddede romber med BD og ED fast forbundne til eu ret vinkel.

k bliver at afbilde ved længden x af strikkene i slap tilstand, naar spændingen i strikkene afbildes ved deres længder formindsket med x.

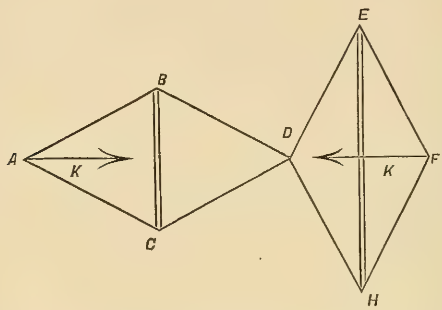


Fig. III.

Tilføies nemlig i D to mod hinanden rettede og med AF parallele kræfter $k = x$, saa vil man med samme virkning kunne anbringe de fire kræfter k parvis mod hinanden efter BC og EH.

Vi faar med andre ord B og C samt E og H dragne sammen ved kræfter, der afbildes ved længderne BC og EH. Men saadanne kræfter holder, som man strax ser, stangsystemet i ligevægt.

Gaar romberne over til kvadrater, bliver k ubestemt.

Sats.

I fig. IV er E og F fast forbundne med stangen DN, saaledes at $EH = FI$, medens D er midtpunktet mellem E og F. Endvidere er ABCD en rombe, hvor $AB = BH = CI$.

Er nu A og N, E og H samt I og F henholdsvis forbundne med to med et og med et strik, der i slap tilstand alle er lige og i længde lig ED = DF, da vil de to kræfter k, der holder stangsystemet i ligevægt, faa konstant værdi, om A tvinges til at ligge paa den rette linie DN.

Anbringes et legeme, hvis vægt er k i N, da vil dette forblive i ro, om ophængningspunktet A bevæges opad eller nedad.

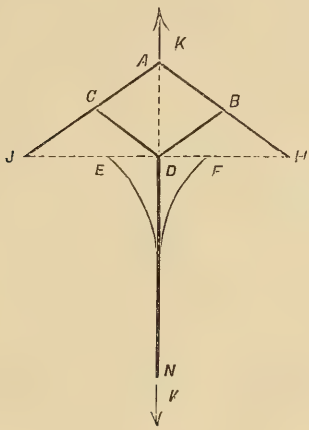


Fig. IV.

Maaske vil denne egenskab ved de her nævnte stangsystemer blandt andet kunne anvendes til konstruktion af hængekøier til brug ombord.

VI.

Et par geometriske sætninger.

Har man tre punkter A, B og C i planet, og man fra disse nedfælder perpendikulærer paa en vilkaarlig ret linie L i planet, saa vil der paa denne findes et punkt D′, der sammen med det ene af de tre perpendikulærers fodpunkter C′ ligger harmonisk mod de to andre A′ og B′.

Vælges L til abscisseaxe og betegner man med x_1 x_2 x_3 x_4 abscisserne for punkterne A′ B′ C′ D′, da er

$$x_4 = \frac{(x_1 + x_2)x_3 - 2x_1 x_2}{2x_3 - (x_1 + x_2)}$$

hvor x_1 og x_2 optræder symetrisk, og ligesaa x_3 og x_2.

Indsætter man nu i denne formel for x_1 x_2 x_3 henholdsvis

$$\alpha_1 + i\beta_1 \qquad \alpha_2 + i\beta_2 \qquad \alpha_3 + i\beta_3$$

da gaar x_4 over i $\alpha_4 + i\beta_4$.

Til tre punkter A, B, C med koordinaterne $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$ svarer paa denne maade et nyt punkt D med koordinaterne $\alpha_4\beta_4$.

Dette punkt D faar, som man ser, en bestemt beliggenhed i forhold til de givne punkter uafhængig af det valgte koordinatsystem.

Parallel forflyttes nemlig dette, faar α_1 α_2 α_3 α_4 den samme tilvæxt, ligesaa med størrelserne β.

Dreies endelig koordinatsystemet en vinkel φ om origo, saa multipliceres herved alle størrelserne $\alpha + i\beta$ med det samme komplexe tal $\cos\varphi + i \sin\varphi$.

Vi siger, at D og C ligger harmonisk mod A og B.

Sats.

Er A, B, C *tre givne punkter i planet og de nye punkter* a, b, c *er saaledes bestemte, at* a *og* A *ligger harmonisk mod* B *og* C *etc., da vil de tre rette linier* Aa, Bb, Cc *skjære hverandre i samme punkt, der desuden er identisk med skjæringspunktet mellem de tre rette linier, der i trianglet* ABC *eller* abc *forbinder høidernes midtpunkter med de tilsvarende siders midtpunkter.*

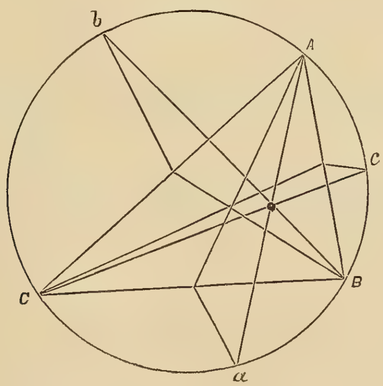


Fig. V.

Vi vælger den rette linie gjennem B og C til Xaxe og midtpunktet mellem B og C til origo.

Sætter man den halve afstand mellem B og C lig k, faar vi kun at gjøre med punkterne

$$-k,0, \qquad k,0, \qquad p,q$$

Er koordinaterne for a, b, c $u_1 v_1$ $u_2 v_2$ $u_3 v_3$ da bliver:

$$u_1 + iv_1 = \frac{p - iq}{p^2 + q^2} \cdot k^2$$

eller

$$u_1 = \frac{pk^2}{p^2 + q^2} \qquad v_1 = \frac{-qk^2}{p^2 + k^2}$$

Heraf

1. $$\sqrt{u_1^2 + v_1^2} \cdot \sqrt{p^2 + q^2} = k^2$$

2. $$\frac{v_1}{u_1} = -\frac{q}{p}$$

Af 2. faar man, *at de rette linier, der forbinder midtpunktet af* BC *med* A *og* a *danner ligestore vinkler med* BC *etc.*

Af 1. og 2. flyder den vistnok bekjendte sats, at punkterne a, b, c ligger paa samme cirkel som punkterne ABC.

Videre bliver:

$$u_2 = \frac{-3p^2 - 3q^2 + 10kp - 3k^2}{(k - p)^2 + q^2} \cdot k$$

$$u_3 = \frac{3p^2 + 3q^2 + 10pk + 3k^2}{(p - q)^2 + q^2} \cdot k$$

$$v_2 = \frac{8qk^2}{(k-p)^2+q^2}$$

$$v_3 = \frac{8qk^2}{(p-q)^2+q^2}$$

For vore tre ligninger faar vi altsaa følgende

$$1' \qquad y = \frac{2qk^2}{k^2-p^2-q^2} - \frac{q}{p} \cdot \frac{k^2+p^2+q^2}{k^2-p^2-q^2} \cdot x$$

$$2' \qquad y = \frac{2qk}{4kp-p^2-q^2-3k^2} \cdot (x-1)$$

$$3' \qquad y = \frac{2qk}{4kp+p^2+q^2+3k^2} \cdot (x+1)$$

2′ og 3′ giver

$$y = \frac{q}{2p} \cdot x$$

$$x = \frac{4pk^2}{p^2+q^2+3k^2} \qquad y = \frac{2qk^2}{p^2+q^2+3k^2}$$

Ved indsætning i 1′ ser man, at skjæringspunktet mellem 2′ og 3′ ligger paa 1′

Rigtigheden af satsens sidste del indsees umiddelbart af ligningen $y = \frac{q}{2p} \cdot x$

Det bemærkes, at punkterne a, b, c er i besiddelse af de samme egenskaber som punkterne A B C.

Sats.

Har hver af de to cirkler sit centrum paa hvert sit af en vinkels ben, og hver tangerer vinkelbenet gjennem den *anden cirkels centrum, da skjærer cirklerne hinanden i punkter, hvis forbindelseslinier med vinkelens toppunkt* A *danner ligestore vinkler med den givne vinkels ben.*

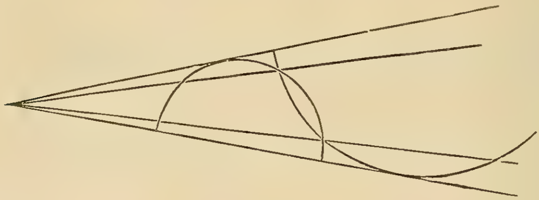


Fig. VI.

Det falder her bekvemt først at bevise, at satsen ogsaa har gyldighed paa kuglen. Vinkelens ben gaar i dette tilfælde over i to storcirkler U og V.

Gaar man ud fra, at det geometriske sted for det ene af de to cirklers skjæringspunkter er en storcirkel gjennem skjæringspunkterne mellem U og V, naar saa er tilfælde med det andet skjæringspunkt, da følder deraf umiddelbart satsens rigtighed for kuglefladens vedkommende.

De to vinkler maa jo i hvert fald blive lige store, naar de to cirklers centre antager en saadan stilling paa U og V, at cirklerne bliver kongruente.

Rigtigheden af vor hjælpesats og hermed ogsaa rigtigheden af vort plane theorem kunde saa indsees ved stereografisk projektion, idet vinkelens toppunkt A valgtes til kuglens berøringspunkt med planet.

At den stereografiske projektion af en cirkel selv er en cirkel, forudsætter parallelaxiomet.

Ikke desto mindre gjælder vort theorem og hjælpesætningen uden hensyn til dette axiom.

Ovenstaaende sats om den stereografiske projektion gjælder nemlig for en uendelig liden kugle og hjælpesætningen altsaa ogsaa, da den gjælder i planet uendelig nær toppunktet A.

Men er vor theorem rigtig paa den uendelig lille kugle, saa finder samme sted for enhver dermed koncentrisk ɔ: for enhver kugle.

Da theoremet saaledes er bevist absolut for kuglens vedkommende, maa det følgelig uafhængig af parallelaxiomet ogsaa have gyldighed i planet.

Et interessant spørgsmaal er det, om satsen alligevel kan bevises ved udelukkende kongruentsbetragtninger i figurens plan.

Man mærke sig det specielle tilfælde, da de to cirklers skjæringspunkter falder sammen til et.

Paa samme maade som ovenfor indser man strax, at satsen kan generaliseres derhen, at de to cirkler ei behøver at tangere vinkelbenene gjennem deres centre.

Der forlanges kun, at de skal tangere to gjennem A gaaende linier, der med den nævnte vinkels ben danner lige store vinkler.

Throndhjem, 23de marts 1896.

SUR QUELQUES FORMES DE L'ÉQUATION DE LAQUELLE DÉPEND LA DIVISION DES PÉRIODES DES FONCTIONS ELLIPTIQUES PAR 7;

PAR

A. PALMSTRØM

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania. — Centraltrykkeriet 1897

Sur quelques formes de l'équation de laquelle dépend la division des périodes des fonctions elliptiques par 7.

I.

Posons avec les notations de M. WEIERSTRASS.

$$a = p\frac{2\omega}{7}, \qquad b = p\frac{4\omega}{7}, \qquad c = p\frac{6\omega}{7},$$

et

$$x = a + b + c,$$

2ω étant une période de la fonction pu. On trouve alors pour x l'équation suivante

$$\begin{aligned} x^3 - 252\frac{g_2}{12}x_6 - 3024\frac{g_3}{8}x^5 - 17010\frac{g_2^2}{12^2}x^4 - 54432\frac{g_2}{12}\frac{g_3}{8}x^3 - \\ -\left(17388\frac{g_2^3}{12^3} + 84672\frac{g_3^2}{8^2}\right)x_2 - 104976\frac{g_2^2}{12^2}\frac{g_3}{8}x - 45927\frac{g_2^4}{12^4} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Si l'on pose $x = 3z$, cette équation prend la forme

$$z^8 - 28\frac{g_2}{12}z^6 - 112\frac{g_3}{8}z^5 - 210\frac{g_2^2}{12^2}z^4 - 224\frac{g_2}{12}\frac{g_3}{8}z^3 - \tag{2}$$
$$-\left(\frac{644}{27}\frac{g_2^3}{12^3} + \frac{3136}{27}\frac{g_3^2}{8^2}\right)z^2 - 48\frac{g_2^2}{12^2}\frac{g_3}{8}z - 7\frac{g_2^4}{12^4} = 0$$

En écrivant symboliquement

$$A^p = \sum_{r=1}^{r=\left[\frac{p}{6}\right]+1} a_p^{(r)} \left(\frac{g_2}{12}\right)^{q-3(r-1)} \left(\frac{g_3}{8}\right)^{2(r-1)},$$

quand

$$p = 2q$$

et

$$A^p = \sum_{r=1}^{r=\left[\frac{p+3}{6}\right]} a_p^{(r)} \left(\frac{g_2}{12}\right)^{q-3(r-1)} \left(\frac{g_3}{8}\right)^{2(r-1)},$$

quand $p = 2q + 1$, les a étant soumis à l'équation de condition

$$\sum a_p^{(r)} = 1,$$

on peut écrire l'équation (2) sous la forme symbolique suivante:

$$(z + A)^7 (z - 7A) = 0.^{*)}$$

*) Halphen: *Traité des fonctions elliptiques*, t. 3, pag. 51—52.

Tous les coefficients sont ici déterminés par la forme symbolique à l'exception de A^6 et A^8. On a dans le cas actuel

$$A^6 = a_6^{(1)} \frac{g_2^3}{12^3} + a_6^{(2)} \frac{g_3^2}{8^2} = \frac{23}{135} \frac{g_2^3}{12^3} + \frac{112}{135} \frac{g_3^2}{8^2}$$

$$A^8 = a_8^{(1)} \frac{g_2^4}{12^4} + a_8^{(2)} \frac{g_2}{12} \frac{g_3^2}{8^2} = \frac{g_2^4}{12^4}$$

En désignant toujours par $\varphi_n(z)$ un polynôme dont la forme symbolique est $(z+A)^{n-1}[z-(n-1)A]$ nous pouvons écrire.

$$\begin{aligned}
\varphi_8(z) &= a_1 z\varphi_7(z) + b_1 \varphi_2(z)\varphi_6(z) + c_1 \varphi_3(z)\varphi_5(z) \\
\varphi_7(z) &= a_2 z\varphi_6(z) + b_2 \varphi_2(z)\varphi_5(z) + c_2 \varphi_3(z)\varphi_4(z) \\
\varphi_6(z) &= a_3 z\varphi_5(z) + b_3 \varphi_2(z)\varphi_4(z) + c_3 \varphi_3(z)^2 \\
\varphi_5(z) &= a_4 z\varphi_4(z) + b_4 \varphi_2(z)\varphi_3(z) \\
\varphi_4(z) &= a_5 z\varphi_3(z) + b_5 \varphi_2(z)^2
\end{aligned} \tag{3}$$

En substituant dans ces équations les expressions symboliques on trouve

$$\begin{aligned}
a_1 + b_1 + c_1 &= 1 & 5b_1 + 8c_1 &= -7 \\
a_2 + b_2 + c_2 &= 1 & 2b_2 + 3c_2 &= -3 \\
a_3 + b_3 + c_3 &= 1 & 3b_3 + 4c_3 &= -5 \\
a_4 &= 3 & b_4 &= -2 \\
a_5 &= 4 & b_5 &= -3
\end{aligned}$$

On obtient deux nouvelles équations pour a_1, b_1, c_1 etc. en excigeant que le polynôme φ_8, calculé par les équations (3), a les coefficients mentionnés ci-dessus, c'est-à-dire que

Trykt den 9de Marts 1897.

$a_6^{(1)} = \frac{23}{135}$, $a_6^{(2)} = \frac{112}{135}$, $a_8^{(1)} = 1$, $a_8^{(2)} = 0$. En égalant dans les deux membres de la première des équations (3) les coefficients de $\frac{g_3^2}{8^2} z^2$ et de $\frac{g_2}{12} \frac{g_3^2}{8^2}$ on trouve par un calcul facile

$$4a_1 a_2 c_3 + 16 a_1 c_2 + 4 b_1 c_3 + 40 c_1 = -\frac{3136}{27}$$

$$-4 b_1 c_3 + 8 c_1 = 0.$$

Entre les 9 inconnus a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, on a donc, 8 équations. On tire de celles-ci:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{15c_3 + 24}{8c_3 + 10} \\
b_1 &= -\frac{7}{4c_3 + 5} \\
c_1 &= -\frac{7c_3}{8c_3 + 10} \\
a_2 &= \frac{4076c_3 + 5120}{81(5c_3 + 8)(c_3 + 8)} \\
b_1 &= \frac{810c_3^2 + 3680c_3 + 5248}{27(5c_3 + 8)(c_3 + 8)} \\
c_2 &= -\frac{2025c_3^2 + 11248c_3 + 15680}{81(5c_3 + 8)(c_3 + 8)} \\
a_3 &= \frac{c_3 + 8}{3} \\
b_3 &= -\frac{4c_3 + 5}{3}
\end{aligned} \tag{4}$$

Des équations (3) on tire

$$\varphi_8(z) = \begin{vmatrix} a_1 z & b_1\varphi_2(z) & c_1\varphi_3(z) & & & \\ -1 & a_2 z & b_2\varphi_2(z) & c_3\varphi_3(z) & & \\ & -1 & a_3 z & b_3\varphi_2(z) & c_3\varphi_3(z) & \\ & & -1 & 3z & -2\varphi_2(z) & \\ & & & -1 & 4z & -3\varphi_2(z) \\ & & & & -\varphi_2(z) & \varphi_3(z) \end{vmatrix}$$

Il faut ici attribuer à a_1, b_1 c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3 les valeurs indiquées ci-dessus. La valeur de c_3 est indifférente. Si l'on pose $c_3 = 0$, on a pour $\varphi_8(z)$ l'expression suivante:

$$\varphi_8(z) = \frac{1}{405} \begin{vmatrix} 12z & -7\varphi_2(z) & & & & \\ -81 & 80z & 164\varphi_2(z) & -245\varphi_3(z) & & \\ & -3 & 8z & -5\varphi_2(z) & & \\ & & -1 & 3z & -2\varphi_2(z) & \\ & & & -1 & 4z & -3\varphi_2(z) \\ & & & & -\varphi_2(z) & \varphi_3(z) \end{vmatrix}$$

Les polynômes $\varphi_2(z)$ et $\varphi_3(z)$ jouent un rôle important dans la théorie des fonctions elliptiques. Posons en effet $z = pu$ on a

$$\varphi_2(z) = p^2u - \frac{g_2}{42} = \frac{1}{6}p''u$$

$$\varphi_3(z) = p^3u - 3\frac{g_2}{12}pu - 2\frac{g_3}{8} = \frac{1}{4}p'^2u$$

II.

Posons

$$z = \xi + e.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\varphi_8(z) = \varphi_8(e) + 8\varphi_7(e)\xi + 28\varphi_6(e)\xi^2 + 56\varphi_5(e)\xi^3 + 70\varphi_4(e)\xi^4 \\ + 56\varphi_3(e)\xi^5 + 28\varphi_2(e)\xi^6 + 8e\xi^7 + \xi^8\end{aligned} \tag{5}$$

$\varphi_7(e)$ et $\varphi_6(e)$ sont ici déterminés par les équations suivantes

$$8\varphi_7(e) = \frac{d\varphi_8(e)}{de}$$

$$7\varphi_6(e) = \frac{d\varphi_7(e)}{de}$$

On a donc dans $\varphi_7(e)$ et $\varphi_6(e)$:

$$a_6^{(1)} = \frac{23}{135}, \qquad a_6^{(2)} = \frac{112}{135}$$

Désignons ces deux fonctions par $\varphi_7^{(1)}(e)$ et $\varphi_6^{(1)}(e)$ pour les distinguer des polynômes φ_7 et φ_6 qui se déduisent des équations (3), quand on y pose les valeurs de a_1, b_1 etc. tirées des équations (4) pour $e_3 = 0$. Nous trouvons facilement:

$$\begin{aligned}\varphi_6^{(1)}(e) &= \frac{188}{81}e\varphi_5(e) - \frac{23}{81}\varphi_2(e)\varphi_4(e) - \frac{28}{27}\varphi_3^2(e) \\ \varphi_7^{(1)}(e) &= \frac{86}{47}e\varphi_6^{(1)}(e) + \frac{24}{47}\varphi_2(e)\varphi_5(e) - \frac{63}{47}\varphi_3(e)\varphi_4(e)\end{aligned} \tag{6}$$

D'après les équations (3) et (4) on a

$$\varphi_8(e) = \frac{12}{5} e\varphi_7(e) - \frac{7}{5}\varphi_2(e)\varphi_6(e)$$

$$\varphi_7(e) = \frac{80}{81} e\varphi_6(e) + \frac{82}{27}\varphi_2(e)\varphi_5(e) - \frac{245}{81}\varphi_3(e)\varphi_4(e) \qquad (7)$$

$$\varphi_6(e) = \frac{8}{3} e\varphi_5(e) - \frac{5}{3}\varphi_2(e)\varphi_4(e)$$

$$\varphi_5(e) = 3e\varphi_4(e) - 2\varphi_2(e)\varphi_3(e)$$

$$\varphi_4(e) = 4e\varphi_3(e) - 3\varphi_2^2(e)$$

Si l'on prend pour e une racine de l'équation $\varphi_3(x) = 0$ on trouve en posant $\varphi_2(e) = \varepsilon$:

$$\varphi_4(e) = -3\varepsilon^2$$

$$\varphi_5(e) = -9e\varepsilon^2$$

$$\varphi_6(e) = -24e^2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^3$$

$$\varphi_7(e) = -\frac{640}{27}e^3\varepsilon^2 - \frac{1814}{81}e\varepsilon^3$$

$$\varphi_8(e) = -\frac{512}{9}e^4\varepsilon^2 - \frac{544}{27}e^2\varepsilon^3 - 7\varepsilon^4$$

$$\varphi_6^{(1)}(e) = -\frac{188}{9}e^2\cdot\varepsilon^2 + \frac{23}{27}\varepsilon^3$$

$$\varphi_7^{(1)}(e) = -\frac{344}{9}e^3\varepsilon^2 - \frac{82}{27}e\varepsilon^3$$

L'équation $\varphi_8(z) = 0$ est alors transformée en celle-ci:

$$\xi^8 + 8e\xi^7 + 28\varepsilon\xi^6 - 210\varepsilon^2\xi^4 - 504e\varepsilon^2\xi^3$$
$$- \left(\frac{5264}{9}e^2\varepsilon^2 - \frac{644}{27}\varepsilon^3\right)\xi^2 - \left(\frac{2752}{9}e^3\varepsilon^2 + \frac{656}{27}e\varepsilon^3\right)\xi \tag{8}$$
$$- \frac{512}{9}e^4\varepsilon^2 - \frac{544}{27}e^2\varepsilon^3 - 7\varepsilon^4 = 0$$

Cette équation est analogue à une équation trouvée par M. Brioschi pour la division des périodes par 5. L'équation même de M. Brioschi peut être trouvée très facilement par la méthode indiquée plus haut pour l'équation du huitième degré.

Si dans l'équation (5) on prend pour e une racine de l'équation

$$\varphi_2(x) = 0,$$

et si l'on pose $\varphi_3(e) = \varepsilon_1$, on trouve à l'aide des équations (6) et (7)

$$\varphi_4(e) = 4e\varepsilon_1$$
$$\varphi_5(e) = 12e^2\varepsilon_1$$
$$\varphi_6(e) = 32e^3\varepsilon_1$$
$$\varphi_7(e) = \frac{2560}{82}e^4\varepsilon_1 - \frac{980}{81}e\varepsilon_1^2$$
$$\varphi_8(e) = \frac{2048}{27}e^5\varepsilon_1 - \frac{784}{27}e^2\varepsilon_1^2$$
$$\varphi_6^{(1)}(e) = \frac{752}{27}e^3\varepsilon_1 - \frac{28}{27}\varepsilon_1^2$$
$$\varphi_7^{(1)}(e) = \frac{1376}{27}e^4\varepsilon_1 - \frac{196}{27}e\varepsilon_1^2$$

L'équation $\varphi_8(z) = 0$ peut donc être remplacée par la suivante:

$$\begin{aligned}\xi^8 + 8e\,\xi^7 + 56\varepsilon_1\,\xi^5 + 280e\,\varepsilon_1\,\xi^4 + 672e^2\,\varepsilon_1\,\xi^3 \\ + \left(\frac{38528}{27}e^3\,\varepsilon_1 - \frac{784}{27}\varepsilon_1^2\right)\xi^2 + \left(\frac{11008}{27}e^4\,\varepsilon_1 - \frac{1568}{27}e\,\varepsilon_1^2\right)\xi \\ + \frac{2048}{27}e^5\,\varepsilon_1 - \frac{784}{27}e^2\,\varepsilon_1^2 = 0.\end{aligned} \tag{9}$$

On peut écrire l'équation (2) sous une forme analogue à celle des équations (8) et (9). Si en effet e est racine de l'équation $\varphi_1(x) = 0$, c'est-à-dire si $e = 0$, on a

$$\frac{g_2}{12} = -\varphi_2(e)$$

et

$$\frac{g_3}{8} = -\frac{1}{2}\varphi_3(e)$$

On peut donc écrire l'équation (2) sous la forme

$$\begin{aligned}z_8+28\varphi_2(e)z^6+56\varphi_3(e)z^5-210\varphi_2^2(e)z^4-114\varphi_2(e)\varphi_3(e)z^3 \\ +\left(\frac{644}{27}\varphi_2^2(e)-\frac{784}{27}\varphi_3^2(e)\right)z^2+24\varphi_2(e)\varphi_3(e)-7\varphi_2^4(e) = 0\end{aligned}$$

L'équation (9) se peut écrire

$$\begin{aligned}\xi^8+8\varphi_1(e)\xi^7+56\varphi_3(e)\xi^5+280\varphi_1(e)\varphi_3(e)\xi^4+672\varphi_1^2(e)\varphi_3(e)\xi^3 \\ +\left(\frac{38528}{27}\varphi_1^3(e)\varphi_3(e)-\frac{784}{27}\varphi_3^2(e)\right)\xi^2 \\ +\left(\frac{11008}{37}\varphi_1^4(e)\varphi_3(e)-\frac{1568}{27}\varphi_1(e)\varphi_3^2(e)\right)\xi \\ +\frac{2048}{27}\varphi_1^5(e)\varphi_3(e)-\frac{784}{27}\varphi_1^2(e)\varphi_3^2(e) = 0,\end{aligned}$$

e étant une racine de l'équation

$$\varphi_2(e) = 0,$$

et l'équation (8)

$$\begin{aligned}\xi^8 + 8\varphi_1(e)\xi^7 + 28\varphi_2(e)\xi^6 - 210\varphi_2^2(e)\xi^4 - 504\varphi_1(e)\varphi_2^2(e)\xi^3 \\ - \left(\frac{5264}{9}\varphi_1^2(e)\varphi_2^2(e) - \frac{644}{27}\varphi_2^3(e)\right)\xi^2 \\ - \left(\frac{2752}{9}\varphi_1^3(e)\varphi_2^2(e) + \frac{656}{27}\varphi_1(e)\varphi_2^3(e)\right)\xi \\ - \frac{512}{9}\varphi_1^4(e)\varphi_2^2(e) - \frac{544}{27}\varphi_1^2(e)\varphi_2^3(e) - 7\varphi_2^4(e),\end{aligned}$$

e étant une racine de l'équation

$$\varphi_3(e) = 0.$$

III.

Brioschi a pour l'équation du sixième degré de laquelle dépend la division des périodes par 5, indiqué la forme suivante

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma = \triangle,$$

où

$$\varphi_\alpha = (x - 2e_\alpha)^2 - 4\left(3e_\alpha^2 - \frac{1}{4}g_2\right).$$

Dans φ_β et φ_γ il faut substituer e_β et e_γ à la place de e_α. e_α, e_β et e_γ sont les racines de l'équation $\varphi_3(x) = 0$. $\triangle$ est le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$.

Remarquons que l'on peut écrire:

$$\varphi_\alpha = (x - 2e_\alpha)^2 - 12\varphi_2(e_\alpha).$$

On peut pour l'équation (1) trouver une forme analogue à l'équation de M. Brioschi. Soit e_α, e_β, e_γ, e_δ les racines de l'équation $\varphi_4(x) = 0$ et posons

$$\varphi_\alpha = (x - 3e_\alpha)^2 - 18\varphi_2(e_\alpha);$$

on peut alors écrire l'équation (1) sous la forme suivante:

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma \varphi_\delta = f(x) \triangle.$$

En effet, si $\triangle = 0$, la forme symbolique de $\varphi_4(x)$ devient effective, et l'équation $\varphi_4(x) = 0$ a trois racines $-A$ et une racine $3A$. On peut donc poser $e_\alpha = -A$, $e_\beta - A$, $e_\gamma = -A$, $e_\delta = 3A$. Les équations $\varphi_\alpha = 0$, $\varphi_\beta = 0$, $\varphi_\gamma = 0$, ont alors toutes la racine double $-3A$, tandis que $\varphi_\delta = 0$ a les racines $-3A$ et $21A$. Le produit de ces quatre fonctions a donc les mêmes racines que l'équation (1) pour $\triangle = 0$.

Si l'on effectue la multiplication des quatre fonctions φ, on trouve que

$$f(x) = -22x^2 + 186\frac{g_2}{12}$$

IV.

On peut écrire:

$$p(nu) - pu = -\frac{\psi_{n+1}(u)\,\psi_{n-1}(u)}{\psi_n^2(u)}\ ^{*)}$$

$\psi_n(u)$ est, quand n est impair, un polynôme entier en pu, les coefficients étant des fonctions entières en $\frac{g_2}{12}$ et $\frac{g_3}{8}$. Quand n est pair, $\psi_n(u)$ est égale à un tel polynôme multiplié par $p'u$. On a

$$\psi_{2p+1} = \psi_{p+2}\psi_p^3 - \psi_{p-1}\,\psi_{p+1}^3 \tag{10}$$

$$\psi_{2p} = -\frac{\psi_p}{p'u}\left(\psi_{p+2}\,\psi_{p-1}^2 - \psi_{p-2}\,\psi_{p+1}^2\right) \tag{11}$$

Posons $pu = z$. On peut démontrer que $\frac{d\psi_{2p+1}}{dz}$ est toujours divisible par $\varphi_3(z)$. Cela est évident pour $p = 0$ et $p = 1$, car

$$\psi_1 = 1$$

$$\psi_3 = 3p^4u - 18\frac{g_2}{12}p^2u - 24\frac{g_2}{8}pu - 9\frac{g_2^2}{12^2}$$

$$= 3\varphi_4(z)$$

*) Halphen: *Fonctions elliptiques*, t. 1. pag. 95—102.

Pour démontrer l'exactitude du théorème pour d'autres valeurs de p nous partirons de la formule (10). Supposons en premier lieu que p est pair. Alors ψ_{p-1} et ψ_{p+1} sont des polynômes entiers en z, tandis qu'on peut écrire:

$$\psi_{p+2} = p'u\mathrm{P}_{p+2}, \qquad \psi_p = p'u\mathrm{P}_p$$

P_{p+2} et P_p étant des polynômes entiers en z. On a alors

$$\begin{aligned}\psi_{2p+1} &= p'^4u\,\mathrm{P}_{p+2}\mathrm{P}_p^3 - \psi_{p-1}\psi_{p+1}^3 \\ &= 16\varphi_3^2(z)\,\mathrm{P}_{p+2}\mathrm{P}_p - \psi_{p-1}\psi_{p+1}^3\end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_{2p+1}}{dz} = 96\varphi_2(z)\varphi_3(z)\mathrm{P}_{p+2}\mathrm{P}_p^3 + 16\varphi_3^2(z)\frac{d\mathrm{P}_{p+2}}{dz}\mathrm{P}_p^3$$

$$+ 48\varphi_3^2(z)\mathrm{P}_{p+2}\mathrm{P}_p^2\frac{d\mathrm{P}_p}{dz} - \frac{d\psi_{p-1}}{dz}\psi_{p+1}^3 - 3\psi_{p-1}\psi_{p+1}^2\frac{d\psi_{p-1}}{dz}$$

Si, au contraire, p est un nombre impair, ψ_p et ψ_{p+2} sont des polynômes entiers en z, tandis qu'on peut écrire:

$$\psi_{p-1} = p'u\,\mathrm{P}_{p-1}, \qquad \psi_{p+1} = p'u\,\mathrm{P}_{p-1}$$

On a donc

$$\psi_{2p+1} = \psi_{p+2}\psi_p^3 - 16\varphi_3^2(z)\mathrm{P}_{p-1}\mathrm{P}_{p+1}^3$$

$$\frac{d\psi_{2p+1}}{dz} = \frac{d\psi_{p+2}}{dz}\psi_p^3 + 3\psi_{p+2}\psi_p^2\frac{d\psi_p}{dz}$$

$$- 96\varphi_2(z)\varphi_3(z)\mathrm{P}_{p-1}\mathrm{P}_{p+1} - 16\varphi_3^2(z)\frac{d\mathrm{P}_{p-1}}{dz}\mathrm{P}_{p+1}^3$$

$$- 48\varphi_3^2(z)\mathrm{P}_{p-1}\mathrm{P}_{p+1}\frac{d\mathrm{P}_{p+1}}{dz}$$

Si donc le théorème est vrai pour les indices impairs moindre que $2p+1$ il est aussi vrai pour cet indice même. Or, nous avons démontré qu'il est vrai pour $2p+1=1$ et $2p+1=3$; il est donc vrai pour tous les indices impairs.

Considérons en particulier le cas $2p+1=5$.

Nous avons

$$\psi_5 = 32\varphi_3^2(z)\,\varphi_6(z) - 27\varphi_4^3(z) \tag{12}$$

Dans $\varphi_6(z)$ il faut ici poser

$$a_6^{(1)} = -\frac{27}{5}, \qquad a_6^{(2)} = \frac{32}{5}.$$

De l'équation (12) on tire:

$$\frac{d\psi_5}{dz} = 192\varphi_2(z)\,\varphi_3(z)\,\varphi_6(z) + 192\varphi_3^2(z)\,\varphi_5(z) - 324\varphi_3(z)\,\varphi_4^2(z)$$

$$\frac{\frac{d\psi_5}{dz}}{\varphi_3(z)} = 192\varphi_2(z)\,\varphi_6(z) + 192\varphi_3(z)\,\varphi_5(z) - 324\varphi_4^2(z)$$

Si dans le second membre de cette équation on substitue les expressions symboliques des fonctions $\varphi_2(z)$ etc. on trouve

$$\frac{\frac{d\psi_5}{dz}}{\varphi_3(z)} = 60(z+A)^7\,(z-7A).$$

Nous avons trouvé ici l'expression symbolique du premier membre de l'équation (2). Un calcul facil donne

$$\frac{\frac{d\psi_5}{dz}}{\varphi_3(z)} = 60\left(z^8 - 28\frac{g_2}{12}z^6 - 112\frac{g_3}{8}z^5 - 210\frac{g_2^2}{12^2}z^4 - 224\frac{g_2}{12}\frac{g_3}{8}\right)$$

$$+\left(180\frac{g_2^3}{12^3} - 320\frac{g_3^2}{8^2}\right)z^2 - 48\frac{g_2^3}{12^2}\frac{g_3}{8}z$$

$$-135\frac{g_2^4}{12^4} + 128\frac{g_2}{12}\frac{g_3}{8}.$$

L'équation (2) peut donc s'écrire

$$\frac{\frac{d\psi_5}{dz}}{\varphi\ (z)} = \left(\frac{1720}{243}z^2 - \frac{40}{9}\frac{g_2}{12}\right)\triangle.$$

SYNOTUS BARBASTELLUS,
(SCHREB.)

OG

PHOCA FOETIDA, MÜLL.,

NYE FOR NORGES FAUNA

AF

R. COLLETT

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1897

Synotus barbastellus, (Schreb.), og **Phoca foetida,** Müll., nye for Norges Fauna.

Af R. Collett.

Synotus barbastellus, (Schreb.) 1774.

Vespertilio barbastellus, Schreb., Die Säugth. 1er Th., p. 168, Pl. 55. (1774).

Christiania Omegn. Et Exemplar af denne for Norges Fauna nye Art blev skudt*) ved Hvalstad i Asker den 2den April 1896, og afgivet til Universitets-Museet.

Den blev her truffet i stærkt couperet Terrain, flyvende omkring en blomstrende *Salix capraea,* ved Foden af den steile og skovklædte Skougum-Aas. Skoven var blandet, og bestod hovedsagelig af Naaleskov, men med enkelte store Løvtræer (Lind og Ask) iblandt. Der saaes mindst 1 Exemplar foruden det skudte.

Allerede i flere Aar har den samme Iagttager omtrent paa samme Sted truffet en Art, der flyver usædvanlig tidligt,

---

*) Af H. Torgersen, Redactør af "Jæger- og Fisker-Forenings Tidsskrift".

Trykt den 31te Marts 1897.

tildels endnu, medens Sneen ligger dyb overalt, og det er tænkeligt, at de alle have tilhørt denne Art.

Saadanne Exemplarer er trufne:

30te Marts 1882 (ligesom det første) under en Rugdejagt.

6te Marts 1889.

13de April 1891; Sneen laa da overalt, og der var fuldt Slædeføre.

21de Marts 1896; meget Sne endnu i Skoven.

Det erholdte Exemplar havde en Totallængde af 104 mm; (heraf havde Halen en Længde af 48 mm.). Cubitus 40 mm.. Vingebredden 275 mm.

Farven var brunsort med lysere Haarspidser; Undersiden var noget lysere, Femur hvidagtig.

Udbredelse. *S. barbastellus* er udbredt over Syd- og Mellem-Europa samt England, og var ikke kjendt nordenfor Syd-Sverige, hvor den forekommer i Skaane og Blekinge, men hører her til de sjeldnere Arter. I Danmark er den ligeledes sjelden, og er hidtil blot fundet paa Sjælland.

I Syd-Europa forekommer den i Schweiz, Spanien, Italien og Syd-Rusland, samt i Nord-Africa og Arabien; i Syd-Asien erstattes den af en nærstaaende Art, *S. darjelingensis*, Hodgs., (den eneste foruden *S. barbastellus*, der hidtil er kjendt af denne Slægt).

Overalt angives den at høre til de tidligst flyvende Arter, og den gaar i Schweizer-Alperne op langs Fjeldsiderne i en Høide af 1500 Meter o. H.

Phoca foetida, Müll. 1776.

Phoca foetida, Müll., Zool. Dan. Prodr. p. VIII, (1776).

Varangerfjorden. Denne Art var ikke med Sikkerhed paavist som funden indenfor Norges Grænser førend i 1882, da Universitetets Museum modtog*) fra Varangerfjorden 3 unge Exemplarer af denne Art. Disse var skudte paa forskjellige Puncter i Fjorden (Meskefjord, Skalelv, Andersby) mellem 10de Februar og 12te Marts, og ansaaes for at forekomme talrigt her denne Vaar.

Det er sandsynligt, at *Ph. foetida* aarlig indfinder sig i Varangerfjorden i Vinter- og Vaarmaanederne under de større Torskefiskerier, der ere betingede af Loddens *(Mallotus villosus)* Indsig for at gyde. Enkelte Aar kan den herunder vise sig talrigt, skjønt neppe nogensinde i den Mængde, som *Ph. groenlandica***). Dog blive forholdsvis faa Individer af begge Arter dræbte, og endnu sjeldnere blive disse videnskabeligt undersøgte. I 1895 blev dog et Par Stykker af *Ph. foetida* dræbte lige paa Vardø Havn den 25de Januar, hvoriblandt et gammelt Individ og en Unge; den sidste indsendtes til Universitetets Museum, hvor den nu er opstillet. Ogsaa de 3 tidligere modtagne Exemplarer vare omtrent halvt udvoxede.

---

*) Gjennem Consul Brodtkorb i Vadsø.

**) Denne Art har i de senere Aar i Tusindvis indfundet sig i Varangerfjorden under „Loddefisket", og er af Beboerne anseet for at være i høi Grad ødelæggende for dette Fiske.

Hvorvidt *Ph. foetida* forekommer i Varangerfjorden til andre Aarstider, kan ikke oplyses, men det er sandsynligt, at den ialfald delvis er stationær.

Trondhjemsfjorden. I Museet i Trondhjem opbevares en udstoppet Unge af denne Art, som angives at være skudt i Trondhjemsfjorden i 1884. Nøiere Angivelse kan ikke længere erhverves.

Sandsynligvis har dette Individ tilhørt den samme arctiske Stamme, hvoraf muligens sporadiske Individer ville vise sig at forekomme hist og her nedover til Landets Sydvestkyst. (Saadanne er dog endnu ikke paaviste paa den mellemliggende Strækning).

Udbredelse. *Ph. foetida* hører til Arter af Sældyrene, der har den videste geographiske Udbredelse.

Skjønt idethele en litoral Form, er den næsten circumpolær. I det europæiske Ishav forekommer den ved Novaja Zemlja, Spitsbergen, Island og Grønland, og gaar paa Atlanterhavets americanske Side mod Syd til Labrador. Den er angivet (af Middendorff, Danilewski, o. a.) som forekommende ved Hvidehavet, men Iagttagelserne herfra ansees af Pleske*) for at være usikre. Ved Nord-Spitsbergen er den truffet op til 82° 40′.

Sandsynligvis er den udbredt langs hele Amerikas arctiske Kyst, da den atter forekommer i Beringshavet og ved Alaska. Ved Asiens Nordkyst blev den under Vega-Expeditionen truffen langs hele Sibiriens Nordkyst, fra Karahavet til Tschuktscher-Halvøen (Vega's Vinterkvarter),

*) Säugethiere u. Vögel der Kola-Halbinsel, p. 164. (1884).

og den opgives her af Nordquist*) at være den talrigste af alle Sæler.

Som bekjendt forekommer *Ph. foetida* ogsaa i hele den Bottniske Bugt, samt i enkelte af de store russiske Indsøer (Ladoga, Onega, Saimen), som en Overlever fra Glacialtiden, sammen med enkelte Crustaceer (hvoriblandt *Idothea entomon*, der delvis udgjør dens Hovednæring). I den Bottniske Bugt er den især talrig i de øvre Dele, men bliver noget sparsommere ned mod Syd-Sverige; ved de nordtyske Kyster viser den sig blot tilfældigt. Derimod er den endnu temmelig talrig mellem de danske Øer, i Øresund (ved Saltholm), og i Storebelt op til Samsø, men synes ikke at gaa op i Kattegat, og er aldrig truffet ved Sveriges Vestkyst eller i det sydlige Norge.

Fra Vest-Europa foreligger neppe nogen sikker Iagttagelse om denne Art, skjønt den er angivet at være funden helt ned i Canalen.**)

---

*) Vega-Expeditionens Vetenskapl. Resultater, B. II, p. 104, (Stockholm 1883)).

**) Den Sæl-Art, som bebor Baikal-Søen, staar *Ph. foetida* nær, men ansees som en distinct Art *(Ph. sibirica,* Gmel.); det samme gjælder om den Form, der forekommer i Aral-Søen og det Caspiske Hav *(Ph. caspica,* Gmel.).

OM

EN SAMLING FISKE FRA AZORERNE

TILHØRENDE

MUSEET I PONTA DELGADA

AF

R. COLLETT

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1897

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. B. XIX. Nr. 7.

Om en Samling Fiske fra Azorerne, tilhørende Museet i Ponta Delgada.

Af R. Collett.

Gjennem Dr. Chaves, Bestyrer af Museet i Ponta Delgada (San Miguel, Azorerne) har jeg nylig modtaget til Bestemmelse en liden Samling Fiske, alle erholdte ved Azorerne. Medens enkelte af disse tilhøre Arter med en vid Udbredelse over Middelhavet og Mellem-Atlanterhavets Øgrupper, frembyde et Par af dem en mere speciel Interesse. 2 af disse vare hidtil kjendte kun i et ringe Antal af sporadisk erholdte Individer *(Tripterygium melanurum* og *Echeneis albescens)*; en er en oprindelig arctisk Art, som tidligere var næsten ukjendt søndenfor Ishavets Omraade *(Eumicrotremus spinosus)*. Endelig er en en pelagisk, vestatlantisk Form, som med Golfstrømmen undertiden føres op under de norske Kyster *(Argyropelecus olfersii)*.

Sebastes maderensis, (Cuv. Val.) 1833.

Scorpaena madurensis,[1] Cuv. Val. Hist. Nat. Poiss. Tome 9, p. 463 (1833).
Sebastes maderensis, Lowe, Trans. Zool. Soc. Lond., Vol. II, p. 175 (1841).

2 Individer, begge smaa Unger, med en Totallængde af 36 mm. Artens Characterer ere derfor endnu ikke fuldt udprægede; Pectoralstraalerne synes saaledes alle endnu at være udelte, og Farvetegningen er skarpere markeret, end hos de ældre.

Nedad Legemet strakte sig hos disse Unger 4 bredere (og 1 smalere) Tverbaand, hvoraf det bagerste bedækker Haleroden; det næste løber over den bagre Del af 2den Dorsal og ned udover Analen. Det 3die og 4de Tverbaand løbe tvers over 1ste Dorsal og ned til noget nedenfor Sidelinien, hvor de flyde sammen; det forreste af disse bedækker Finnens forreste Straaler, det andet de mellemste.

Endelig findes ogsaa et kort og smalt Tverbaand over 1ste Dorsals bagre Del, der dog taber sig før det naar Sidelinien, men danner en sort Plet i Dorsalens Rand.

Sebastes maderensis er oprindelig beskrevet af Cuvier og Valenciennes i 1833 efter et Exemplar fra Madeira. Det nærmere Kjendskab til denne Art skyldes væsentlig Lowe i hans «History of the Fishes of Madeira[2])», samt Steindachner i hans Beretning om hans ichthyologiske Reise til Spanien og Portugal.[3])

---

1) Vistnok en Trykfeil for *maderensis.*
2) P. 177 (London 1843—60).
3) Sitz. Ber. Kais. Akad. Wiss. Wien 1867, B. LVI, p. 673 (1867).

Udbredelse. Denne Art forekommer særdeles talrigt ved Madeira og Canarerne, samt ved den mellemliggende Øgruppe Salvages.[1]) Ved de europæiske Kyster er den sjeldnere, men forekommer dog ved Spanien og Portugal; i Middelhavet synes den at være idethele sparsom, skjønt den utvivlsomt her har en vid Udbredelse, idet den af Steindachner er erholdt saavel ved Malaga, som ved Kysterne af Palæstina (Beirut).

I 1888 fandtes den af L'Hirondelle-Expeditionen første Gang ved Azorerne (ved Graciosa).[2])

Echeneis albescens, Temm. Schleg. 1842.

Echeneis albescens, Temm. Schleg. Fauna Jap. Poiss., p. 272, Pl. 120, Fig. 3 (1842). (Japan).

Et Exemplar.

Totallængde	48 mm.
Sugeskivens Længde	15 —
Ventralernes Længde	4 —

Exemplaret, som er ganske ungt, svarer i alle Henseender til det af Günther beskrevne Individ fra China i British Museum.[3]) Sugeskivens Længde indeholdes i Totallængden 3,2 Gange; dens Pladepar er 13. Halen er svagt afrundet, Snudespidsen ligeledes afrundet. Ventralerne ere relativt korte, og udgjøre lidt over $1/4$ af Sugeskivens Længde.

Underkjæven er, ligesom Vomer, forsynet med en Del spredte og temmelig lange Tænder. Mundvinkelen ligger under det 3die Pladepar.

---

1) Vinciguerra, Atti Mus. Civ. Gen., Vol. XVIII, p. 611 (Genova 1883).

2) Collett, Rés. Camp. Sci. Albert I, Fasc. X, Poiss. p. 127 (1896).

3) Cat. Fish. Brit. Mus. Vol. II, p. 377 (1860).

Farven er hvidagtig langs Ryglinien, forresten graabrun.

Udbredelse. Denne Art staar *E. clypeata*, Günth. 1860 (fra Havet omkring Cap) nær, men adskiller sig, ifølge denne Forf., fra denne ved sin noget længere Mundaabning, samt noget længere Ventraler og Pectoraler.

Typ-Exemplarerne af *E. albescens* ere fra Japan; desuden eier British Museum Exemplarer fra Havet udenfor China, samt fra Havet søndenfor New Guinea; ligeledes er et Exemplar taget ved La Paz i den Californiske Golf.

Fra Atlanterhavet foreligger den fra Madeira, hvorfra British Museum, (ifølge en skriftlig Meddelelse af Dr. Boulenger), har modtaget Exemplarer gjennem Dr. Johnson.

Echeneis remora, Lin. 1766.

Echeneis remora, Lin. Syst. Nat., Ed. XII, p. 446 (1766).

Et Exemplar med en Totallængde af 104 mm.; Sugeskivens Pladepar er 19.

Udbredelse. Synes at være den hyppigst forekommende *Echeneis*-Art, og findes i Regelen i talrige Exemplarer i de fleste Museer. Saavidt der herom haves nogen Oplysning, ere disse næsten altid tagne fra pelagiske Hai-Arter (især *Carcharias*-Arter), og *E. remora* har derfor en vid Udbredelse i næsten alle varmere og tempererede Verdenshave.

I de europæiske Farvande forekommer den i Middelhavet lige ind til Grækenland, dog idethele her ganske sparsomt; ved Vest-Europa ere enkelte Exemplarer tagne i Golfe de Gascogne, samt mod Nord saa langt som ved de britiske Kyster. Ved de nordeuropæiske Kyster vides den ikke iagttagen; derimod haves et Par Meddelelser om, at den er fundet paa Island, første Gang (1570) fastsuget til en *Lamna*, dernæst (1720) fæstet til en Baad. Ogsaa senere (ifølge Stenstrup 1840) ere Exemplarer bragte til Island med Skibe.[1])

Ved de amerikanske Kyster gaar den mod Nord til New-York, og i Pacific op til San Francisco.

Eumicrotremus spinosus, (Müll.) 1776.

Cyclopterus spinosus, Müll. Prodr. Zool. Dan., p. IX (1776).
Eumicrotremus spinosus, Gill., Proc. Acad. Nat. Sci. Philad., Sept. 1864, p. 190 (1864).

1 Exemplar.

Totallængde	60	mm.
Hovedets Længde	22	—
Legemets Høide	26	—
Sugeskivens Diameter	14	—

Exemplaret var slet conserveret, og tillader ikke sikker Tælling af Finnestraaler. Det er iøvrigt i alle Henseender overensstemmende med arctiske Individer; Bentornene paa Legemet og Basis af Finnerne vel udviklede.

Udbredelse. *E. spinosus* er, i Modsætning til *Cyclopterus lumpus*, en Dybvands-Art, der hidtil har været kjendt alene fra de arctiske Farvande.

Oprindelig blev *E. spinosus* beskreven fra Grønland, hvor den har været kjendt allerede siden forrige Aarhundrede gjennem Müller (Prodromus Zool. Dan., p. IX, 1776),

---

[1]) Lütken, Vidensk. Medd. Naturh. Foren. Kbhvn. 1875, p. 38 (Noten).

og Fabricius (Fauna Groenland. p. 134, 1780), og hvor den synes at være talrig; af den engelske Nordpols-Expedition (under Capt. Nares) erholdtes den ved Vest-Grønland paa flere Steder (Cape Napoleon og Franklin Pierce Bay), mellem 79 og 80° N. B. (Proc. Zool. Soc. Lond. 1877, p. 293).

Søndenfor Grønland er den paa Atlanterhavets americanske Side fundet paa Dybderne udenfor de forenede Stater omtrent til 42° N. B., hvor enkelte Exemplarer ere tagne udenfor Eastport (Maine), og i Massaschusetts Bay.

Fra det vestlige arctiske America er den kjendt fra Alaska og Beringshavet, hvor den synes at forekomme talrig, da et Individ af *Alepidosaurus aesculapius*, Bean, taget ved Unalashka i October 1880, havde i Ventrikelen 21 Individer af *E. spinosus*, alle fuldvoxne paa 1 nær (Bean, Proc. U. S. Nat. Mus, Vol. V, p. 661, 1882).

Fra Beringshavet er imidlertid en Art i 1861 beskrevet af Dr. Günther under Navn af *Cyclopterus orbis* (Cat. Fishes Brit. Mus., Vol. III, p. 158, 1861), som ifølge Diagnosen væsentlig skiller sig fra *E. spinosus* ved et ubetydeligt ringere Antal Straaler i 2 D. og A. Men da det har vist sig, at et Exemplar fra Kamtschatka, som opbevares i Univ. Mus., i Antallet af Straaler i disse Finner danner en tydelig Overgang fra den typiske *E. spinosus* til den af Günther beskrevne Art, har jeg antaget,[1]) at begge Arter vare identiske.

Nyere americanske Ichthyologer have imidlertid troet at finde Forskjel mellem begge de nævnte Arter ogsaa i enkelte andre Henseender, og opføre indtil videre *E. orbis* (Günth.) som en fra *E. spinosus* skilt Art, skjønt de er-

---

1) Den Norske Nordhavs-Expedition 1876—78. Zoologi, Fiske, p. 48 (1880).

kjende, at Spørgsmaalet først kan løses med et rigeligere Materiale af den sidstnævnte Form.

I det arctiske Europa er endelig *E. spinosus* af Faber fundet ved Island,[1]) ved Jan Mayen,[2]) samt ved Spitsbergen, medens den endnu ikke er truffet længere mod Øst (i Karahavet), eller ved det europæiske Continent.

Ved Spitsbergen er den allerede paavist af Kröyer[3]) i 1838, og senere er gjenfundne af de fleste Expeditioner, som her have gjort Dybvandsskrabninger, sidste Gang af den norske Nordhavs-Expedition, som den 19de August 1878 optog et udmærket vel conserveret Exemplar fra en Dybde af 236 Meter (129 Favne) i Isfjorden; Temperaturen paa Bunden var ÷ 1,2° C. Bunden Stenbund og Mudder.

Paavisningen af denne Art fra Havet omkring Azorerne, altsaa under en Breddegrad (38° N. B.), som den sydlige Del af Portugal, er af Interesse, da den viser Ensartetheden af Havets physiske Forholde i de større Dybder under saa ulige Breddegrader. Som ovenfor nævnt, forekommer *E. spinosus* i de arctiske Dele i det iskolde Vand, der endog gaar under 0° C.

---

1) Naturgesch. Fische Islands, p. 54 (1829).

2) Steindachner, Oesterr. Polarstation Jan Mayen, Beob. Ergebn. Fische, III, p. 106 (1886).

3) Gaimard, Voy. Scand. Lap. Spitzb. etc. Zoologie, Poissons, Pl IV (1845).

Blennius galerita, Lin. 1766.

Blennius galerita, Lin. Syst. Nat. Ed., XII, p. 441 (1766).
Salarias symplocos, Hilgend. Sitz. Ber. Ges. Naturf. Freunde Berl. 1888, p. 79; Arch. f. Naturg. 1888, p. 209, Taf. XIV, Fig. A. (1888). (Azorerne).

Et Exemplar. Totallængde 71 mm., Hovedets Længde 14 mm.

Exemplaret tilhører den Farvevarietet, hvor Legemet er ensartet mørk sepiafarvet uden Tverbaand, men overalt bestrøet med smaa sorte Pletter, der staa tættest paa Hovedet, og mangle paa Finnerne.

Udbredelse. Denne Art tilhører væsentlig Middelhavet, og det mellemste Atlanterhavs Øgrupper.

I Middelhavet er den udbredt, om end ikke i særdeles stort Antal, langs Italiens Kyster op mod Bunden af Adriaterhavet (Lesina, ifølge Giglioli); den er dog, ifølge Guichenot[1]) hyppig ved Kysterne af Algier, og gaar mod Øst lige op til det Sorte Hav (Kessler); ligeledes er den fundet ved Grækenland.

Den er talrig ved Kysterne af den Spanske Halvø, og gaar mod Nord op til de britiske Kyster ved Canalen, hvor den paa enkelte Puncter ikke er sjelden.

Fremdeles forekommer den ved Madeira, og er særdeles hyppig ved Canarerne.

---

[1]) Explor. Scient. de l'Algérie 1840—42. Zoologie, Livr. 32, p. 72 (Paris 1850).

Ved Azorerne er den allerede i 1888 omtalt af Simroth og Hilgendorf; samme Aar optoges et Exemplar ved Fayal of L'Hirondelle-Expeditionen.

Tripterygium melanurum, Guich. 1850.

Tripterygium melanurus, Guich. Explor. Scient. de l'Algérie 1840—42. Zoologie, Livr. 32, p. 75, Poiss. Pl. 4, Fig. 4 (1850).

2 Exemplarer, det ene en halvoxen Unge. Det større Individ havde følgende Maal:

Totallængde	52 mm.
Hovedets Længde	12 —
Øiets Diameter	3,5 —

Sidelinien indeholdt 42 Skjæl; M. B. 6.

I Farvetegningen stemmede de 2 Exemplarer, uagtet deres store Forskjel i Størrelsen, i alle Hovedtræk overens

Denne Art staar den middelhavske *Tr. tripteronotus*[1]) nær, og stemmer overens med denne i Legemsbygning, Skjælbeklædning, Tentakler og Finnestraalernes Antal.

Derimod er Farvetegningen forskjellig; mest iønefaldende er en dybsort, af hvidgult omfattet Plet paa Haleroden; 1ste Dorsal er sortfarvet, Hovedet lyst, og de øvrige Finner næsten ensfarvet hvidlige.

Fremdeles synes Pectoral og Ventraler at være relativt kortere hos *Tr. melanurum;* saaledes naa Ventralerne med sine Spidser knapt til Anus, og Pectoralspidsen rager neppe

---

1) *Tripterygium tripteronotus,* (Risso) 1810; *Tr. nasus,* Risso 1826.

Trykt den 8de April 1897.

ud over Grunden af den 6te Analstraale (hos *Tr. tripteronotus* naar den omtrent den 12te).

Farvetegning. Hovedet er lyst rødliggult, med mørkere Marmoreringer paa Kinderne; foran Øiet er et mørkere Baand.

Nedad Ryggen løbe mørkere Skygninger, begrændsede af lysere Tverbaand, der ere mest markerede langs Ryglinien og paa Halen.

De mørkere Skygninger blive ligeledes dybere paa Halepartiet, og danne nederst paa Haleroden en stor dybsort Plet, omgivet af gulhvidt; denne sorte Plet fortsætter sig i en kort sort Stribe langs henad Roden af de mellemste Caudalstraaler, hvorved fremkommer en næsten korsformig Figur.

Af de lyse Tverbaand findes det nederste paa Haleroden, hvor det optager Rummet mellem den ovennævnte sorte Plet og Slutningen af 3die Dorsal. Det næst bagerste Baand ligger under 3die til 6te Straale af 3die Dorsal; det 3die Baand (bagfra) ligger bag Slutningen af 2den Dorsal. Endelig findes omtrent 3 svagere Baand under 2den Dorsal.

Alle Baand ophøre allerede omtrent ved Sidelinien (eller blive uregelmæssige nedenfor denne), og de mørkere Skygninger ere ligeledes uregelmæssige eller ligesom forskudte nedenfor Sidelinien.

Finnerne. 1ste Dorsal er sortagtig; 2den og 3die Dorsal have Tverbaand, som hos de forhaandenværende Exemplarer ere utydelige. Paa Pectoralens Fæste er en mørkere Plet; Pectoralerne selv ere, ligesom Analen, Ventralerne og Caudalen, hvidagtige (eller blot svagt pigmenterede).

Udbredelse. Denne Art blev opstillet i 1850 af Guichenot efter Exemplarer fra Kysterne af Algier, hvor den angaves at forekomme sparsomt (medens den anden Art, *Tr. tripteronotus*, her var talrig).

Hvorvidt den i Virkeligheden udgjør andet end en Farvevarietet af den sidstnævnte Art, kan ikke fyldestgjørende besvares med det forhaandenværende ringe Materiale.

Lepadogaster bimaculatus, (Penn.) 1776.

Cyclopterus bimaculatus, Penn. Brit. Zool. Ed. IV, Vol. III, p. 397 (1776).

Et Exemplar. Totallængde 44 mm. Exemplaret er i slet Forfatning.

Udbredelse. Ligesom de øvrige Arter af Slægten *Lepadogaster* er denne en Kystform, som tilhører Middelhavet og Vest-Europa; men den har en større Udbredelse, end nogen af dem, idet den forekommer fra Grækenland i Øst, Canarerne i Syd og op til henimod Polarcirkelen i Nord.

I Middelhavet er *L. bimaculatus* udbredt lige til dets østligste Dele[1]), og Univ. Mus. eier Exemplarer fra Sicilien (Syracus og Catania), tilhørende Formen *L. desfontainii*, Risso 1836. I Adria gaar den, ifølge Gräffe, lige op til Triest.

Iøvrigt forekommer den, skjønt intetsteds talrigt, langs Italiens og Spaniens Kyster, ligesom den (i forskjellige Farvevarieteter) optræder langs Kysten af Algier (Guichenot).

I Atlanterhavet er den truffet langs den spanske Halvøs Kyster, i Golfe de Gascogne, og ved Kysterne af England og Scotland, intetsteds egentlig talrigt.

---

[1]) Grækenland, ifølge Apostolidès, La pèche en Grèce, p. 30 (Athènes 1883).

Endelig er den langs Norges Kyster ikke sjelden fra Stavanger af og op til Trondhjemsfjorden (64° N. B.); undertiden ere her (i Omegnen af Bergen) indtil 5 Individer fundne fastsugede til et enkelt Skal af *Cyprina islandica.*

I Skagerak og Kattegat er den sjelden, og blot et enkelt Individ er her fundet i 1881 (Lilljeborgs Fauna, Fiskarne 1 D., p. 747) ved Väderöerna; i Østersøen forekommer den ikke.

Ved Atlanterhavets Øgrupper er den truffet af Steindachner ved Canarerne, og af Simroth[1]) ved Azorerne.

Argyropelecus olfersii, (Cuv.) 1829.

Sternoptyx olfersii, Cuv. Regne Anim., Ed. II, Tome 2, p. 316 (1829).
Argyropelecus olfersii, Cuv. Val. Hist. Nat. Poiss., Tome XXII. p. 408 (1849).

3 Exemplarer, alle halvvoxne; deres Dimensioner vare:

	a.	b.	c.
Totallængde	49 mm.	52 mm.	54 mm.
Legemets Høide	31 —	32 —	33 —
Hovedets Længde	14 —	15 —	16 —

Til de allerede foreliggende Beskrivelser af denne Art skal blot føies en Bemærkning om Analens Bygning.

Allerede Prof. Smitt[2]) har gjort opmærksom paa Straalernes eiendommelige Anordning i denne Finne, idet den 8de Straale er ved et Mellemrum skilt fra den 7de og 9de. Det sees hos de forhaandenværende yngre Individer, at Mellemrummet mellem den 7de og 8de er optaget af en 3-kløvet

---

1) Hilgendorf, Arch. f. Naturg., 1888, p. 210.

2) Skand. Fiskar, II. Del, p. 928 (1895).

Torn, der rager et kort Stykke frem over Finnernes Grund; mellem 8de og 9de er der en lignende, mere knudeformig Torn, der er lavere.

Udbredelse. Artens egentlige Hjemstavn er sandsynligvis Atlanterhavets mellemste Dele, omtrent mellem Azorerne og Vest-Indien; men forholdsvis faa Exemplarer ere hidtil kjendte herfra.

I 1849 omtaler Cuvier og Valenciennes[1]) et i Berliner-Museet opbevaret Exemplar, (Typ-Exemplaret), der stammede fra Havet mellem Canarerne og Brasilien, samt et andet Exemplar, taget i Nærheden af Cap. Ligeledes nævner Nilsson (1855) i sin Skand. Fauna et Exemplar paa Museet i Lund fra Vest-Indien.

Fremdeles har Museet i Kjøbenhavn enkelte yngre Exemplarer fra Azorerne, hvor ligeledes et Exemplar optoges under L'Hirondelle's Expedition (ved Fyrsten af Monaco) i 1888. Endelig er den, ifølge Lowe, fundet ved Madeira. I det egentlige »Sargasso-Hav», er den, mærkeligt nok, ikke med Sikkerhed fundet.

Flere Individer ere optagne i de seneste Aar under de nordamericanske Expeditioner med »Albatross» til Grand Banks mellem 38 og 42° N. B. (Havet nordenfor Bermudas-Øerne,[2]) eller i det egentlige Golfstrøms-Belte; og med Golfstrømmen ere i Aarenes Løb et ikke ringe Antal Individer førte ind mod de europæiske Kyster. Under Travailleur-Talisman-Expeditionen optoges saaledes 2 Exemplarer udenfor Portugal[3]), ligesom Challenger-Expeditionen erholdt 1 Exemplar udenfor Cap Finisterre.

---

1) Hist. Nat. Poiss., Tome 22, p. 410 (1849).

2) Goode and Bean, Oceanic Ichthyology, p. 127 (Wash. 1895).

3) Vaillant, Exped. Scient. Trav. Talism. Poiss., p. 107 (1888).

Hyppigere end paa nogen anden Del af Vest-Europa har denne sub-tropiske Art vist sig ved Norges Kyster, sammen med andre Prøver af Golfstrømmens Dyre- og Planteliv. Omkring 16—20 Individer ere her i Aarenes Løb fundne, alle paa Strækningen mellem Bergen og Finmarken, og af disse opbevares noget over det halve Antal i Landets Museer.[1]) De fleste af disse Exemplarer ere havnede paa Kysterne af Bergen Stift, i Regelen drevne døde op i Stranden, eller udtagne af Ventriklerne af de større *Gadus*-Arter. Det nordligste af alle drev iland ved Rolfsøhavn nær Nordcap (71° N. B.) i Januar 1882, efter en voldsom Orkan.

Det første som nordisk bekjendte Individ blev fundet ved Ranenfjord i Nordland i 1835, og er udførligt beskreven og afbildet af v. Düben og Koren i 1844[2]); det sidste Exemplar blev fundet i 1890 udenfor Bergen.

De fleste af de norske Individer have været fuldt udvoxede, eller nær derved; et enkelt var mindre, end de øvrige, og havde en Totallængde af 61 mm.

Endelig er et Exemplar strandet i 1855 ved Vestmanna-Øerne ved Island, og nedsendt til Museet i Kjøbenhavn.

Levemaade. Det er sandsynligt, at *Argyropelecus olfersii* er en Dybvands-Art, der i Almindelighed kun kommer til Overfladen om Natten, og den er derfor muligens i Virkeligheden stationær over større Dele af Atlanterhavet. I Lighed med flere andre pelagiske Fiskearter, (saasom de fleste af Familien *Ceratiidae*), kunne de saaledes leve baade i de øvre Vandlag, og trænge ned til betydelige Dybder. Saaledes angives Travailleur-Talisman-Exemplarerne at være

[1]) Zool. Museum i Christiania har for Tiden 5 norske Individer.

[2]) Kgl. Vetensk. Akad. Handl. 1844, p. 80, Tab. III (1846).

optagne fra en Dybde af 950—1616 Meter, og Challenger-Individet endog fra 1125 Favnes Dyb (2120 Meter).

Dr. Günther betvivler imidlertid med Rette, at Individerne i Virkeligheden ere hentede op fra denne betydelige Dybde, men antager, at de ere snarere medfulgte Trawlen paa dens Vei gjennem de høiere Vandlag.

Da de 3 foreliggende Individer fra Azorerne alle vare af samme Størrelse, ere de sandsynligvis alle optagne ved samme Leilighed; muligens holde de sig i Flokke eller Stim.

Indre Dele. Hos et af de ved Tromsø strandede Individer fandt jeg Ovarierne udspændte af moden Rogn; Æggenes samlede Antal kunde anslaaes til omtrent 1000 Stykker.

Hos et Individ, ligeledes fra Norge, fandt jeg Ventrikelen indeholdende et halvt fordøiet Exemplar af *Maurolicus pennanti* (Walb.), med en Totallængde af 50 mm.; Længden af dens Bytte var saaledes over Halvdelen af Individets egen Længde.

OM EN DEL

FOR NORGES FAUNA NYE FISKE

FUNDNE I 1880—1896

AF

R. COLLETT

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1897

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. B. XIX. Nr. 8.

Om en Del for Norges Fauna nye Fiske, fundne i 1880—1896.

Af R. Collett.

Siden 1883, da det 2det Hoved-Supplement til Norges Fiske udkom («Meddelelser om Norges Fiske i Aarene 1879—83», i Nyt Mag. f. Naturv., 29 B., p. 47), er Landets Fauna forøget med 8 nye Arter, hvoraf et Par have særlig Interesse som tidligere ikke paaviste indenfor Europas Omraade (*Chlamydoselachus anguineus*, Garm. og *Sudis kröyeri*, (Ltk.)).

Hertil komme enkelte Arter, der allerede tidligere (før 1883) ere erholdte ved de norske Kyster, men af forskjellige Grunde hidtil ikke optagne i de af Forfatteren indtil dette Aar meddelte Oversigter over Landets Fiskefauna. Disse sidste ere følgende:

1. **Ammodytes cicerellus**, Raf. 1810. Et yngre Individ er af Prof. Lilljeborg optaget i Bundskrabe fra en Dybde af 30 Favne ved Grip udenfor Aalesund 9de August 1858 sammen med *A. lancea*, og er nøiere omhandlet og beskrevet i hans «Sveriges och Norriges Fauna, Fiskarne», B. 2, p. 228, 1886 (Upsala 1891).

Exemplaret havde en Totallængde af 126 mm.; Legemets største Høide er 7 mm., Hovedets Længde 24 mm. Afstand fra Snudespids (Underkjævens) til Anus 71 mm., til Dorsalen 34 mm.

Legemets Høide indeholdes saaledes hos dette Exemplar 18 Gange i Totallængden.

Dette er det eneste Exemplar, som hidtil vides erholdt i Scandinavien. Af Lilljeborg ansaaes den som normal og stationær paa den angivne Localitet; paa samme Sted erholdtes en Del sjeldnere Conchiferer, saasom *Pectunculus glycimeris, Venus casina,* og *Tellina crassa.*

2. **Syngnathus rostellatus,** Nilss. 1855. Som allerede i 1879 (1ste Hoved-Supplement til Norges Fiske, Forh. Vid. Selsk. Chr.a 1879, Nr. 1, p. 101) berørt, er denne Form hyppig i Christianiafjorden, men jeg troede dengang ikke at burde adskille den som en distinct Art fra *S. acus,* Lin.

De største Exemplarer, som jeg har erholdt fra vore Kyster, have havt en Totallængde af 160 mm.

Foruden fra Christianiafjorden har jeg undersøgt Exemplarer fra Fjordene ved Arendal, samt fra Bergens Omegn, fra hvilken sidste Localitet der opbevares Exemplarer saavel i Bergens Museum, som i Universitets-Museet i Christiania.

Fra andre end de nævnte Localiteter ved de norske Kyster foreligger endnu ikke denne Art.

3. **Lycodes muraena,** Coll. 1878. Ligesom *L. frigidus,* er denne en af Nordhavs-Expeditionens nye Former, men er ikke tidligere medregnet blandt Landets Fiskefauna, fordi denne har hidtil omfattet blot saadanne Arter, der vare erholdte umiddelbart under Landets Kyster. Sandsyn-

ligvis bør dog Faunaens Omraade udvides derhen, at det Dyreliv medregnes, som befolker Kystbankerne («Storeggen», etc.) indtil disses Afhældning mod det dybere Atlanterhav.

Et Exemplar af *L. muraena* erholdtes (Stat. 124) omtrent 230 Kilom. vestenfor Træen (Helgeland) under Expeditionens 2det Togt den 19de Juni 1877, fra en Dybde af 350 Favne, og hvor Bundtemperaturen var ÷ 0,9° C.

Exemplaret, hvis Totallængde var 141 mm., udgjør denne characteristiske Arts Type, og er beskrevet i Forh. Vid. Selsk., Chr.a 1878, Nr. 4, p. 15. Nyere americanske Forskere have anseet den som udgjørende en egen Slægt (*Lycenchelys*, Gill 1884), men dennes Characterer ere idethele blot relative, og Slægten er ved tydelige Overgange forbunden med den typiske Slægt *Lycodes*.

Senere erholdtes et Par Individer af samme Art under Expeditionens sidste Togt, i 1878, i Havet vestenfor Beeren Eiland og Spitsbergen.

Fremdeles bleve et større Antal Individer optagne i Færø-Renden under «Knight-Errant» Expeditionen i 1880 og 1882, og omtalte af Günther (i 1887) i hans Beretning om Challenger-Expeditionens Materiale (p. 79). Ved de amerikanske Kyster er Arten endnu ikke paavist.

4. **Mugil auratus**, Risso 1810. Denne Art erholdtes første Gang i 1880, senere i 1896, i Christianiafjorden, og er omtalt af Smitt i 1892 i hans nye Udgave af «Scandinaviens Fiskar» (I, p. 139). Den er nærmere omhandlet nedenfor (p. 18).

Fam. **Lamnidae.**

Isurus oxyrhynchus, Raf. 1810.

Isurus oxyrinchus, Raf. Caratt. Alc. Nuovi Gen. e Nuovi Specie Anim. Sicil. p. 12, Pl. XII, Fig. 1 (1810).

Oxyrrhina spallanzanii, Bonap. Icon. Fauna Ital. Tomo III. Pesci (1834).

Oxyrhina gomphodon, Müll Henle, Syst. Beschr Plagiost., p. 68, Pl. 28 (1841).

Lamna spallanzanii, Günth. Cat. Fishes Brit. Mus. Vol. VIII, p. 390 (1870).

Localitet: Bergensfjord 1896.

Den 14de Juli 1896 fangedes i Kilenot ved Tellevaag (Sotra) udenfor Bergen et Exemplar af en Hai, hvoraf blot nogle faa Rester ere blevne opbevarede, og gjennem Conservator Grieg bragte til Bergens Museum, og som viste sig at tilhøre denne Art.

Det fangede Exemplar havde en Længde af 2895 mm., men blev strax sønderhugget. Blot nogle faa Levninger, væsentlig Craniet med de 2 Underkjæver, det meste af venstre Ventral, lidt af Gjællebuerne, samt 60—70 af Tænderne bleve reddede. Af disse sidste har jeg erholdt en Del til nærmere Undersøgelse; de største havde en Længde af 33 mm.[1])

Sandsynligvis har der været flere Exemplarer af samme Art i Følge. En Del store Haier saaes samtidigt i samme Fjord, ofte visende sig i Vandskorpen; et Individ, som

[1]) Enkelte Dele af disse Levninger opbevares paa Universitetets Museum i Christiania.

muligens har tilhørt denne Art, iagttoges ogsaa af Conservator Grieg et Par Dage senere lige i Nærheden (Goltesund 17de Juli).

Udbredelse. *Isurus oxyrhynchus* har sin fornemste Udbredelse i Middelhavet og de tilstødende Dele af Atlanterhavet, men forekommer ogsaa i det indiske Ocean.

I Middelhavet er den paa flere Steder temmelig talrig, og gaar mod Øst lige hen til Grækenland.[1])

Ligeledes gaar den i Adriaterhavet op til Triest, og viser sig ogsaa langs den africanske Kyst (Tunis, ifølge Vinciguerra)

I Atlanterhavet er den udbredt mod Vest idetmindste til Azorerne,[2]) ligesom den ogsaa forekommer ved Madeira og Canarerne. Den er hyppig udenfor Kysterne af Portugal, og gaar mod Nord op til Golfe de Gascogne, medens den endnu ikke synes at være funden i Canalen eller ved de Britiske Øer.

I de americanske Farvande er den endnu ikke med fuld Sikkerhed truffet.

Derimod omtales den som funden i det Røde Hav, ved Muscat i Arabien,[3]) samt i det Indiske Ocean.[4])

---

1) Apostolidès, La pêche en Grèce, p. 6, (Athènes 1883).

2) Hilgendorff, Archiv f. Naturgesch. 1888, p. 213.

3) Boulenger, Proc. Zool. Soc., Lond. 1889, p. 243.

4) Day, Fishes of India, p. 722 (1878); Fauna of British India, Fishes, Vol. I, p. 26 (1888).

Fam. **Galeidae.**

Mustelus canis, (Mitch.) 1815.

Squalus canis, Mitch. Trans. Lit. Phil. Soc., New-York, I, p. 486 (1815).
Squalus (Galeorhinus) hinnulus, Blainv. Faune Franc., p. 83 (1828).
Mustelus plebejus, Bonap. Icon. Fauna Ital., Tomo III, Pesci (1834).
Mustelus vulgaris, Müll. Henle, Plagiost, p. 190, Pl. 27 (1841), et auctorum.

Localitet: Christianiafjorden 1887.

Et Exemplar blev fanget i Garn ved Nakholmen lige udenfor Christiania 17de November 1887, og afgivet til Universitetets Museum i Christiania. Det var en ung Hun, med uudviklede Generationsorganer.

Udmaalinger.

Totallængde	773	mm.
Hovedets Længde	157	—
Snudespids til Anus	337	—
Fra Anus til Halespidsen	384	—
Snudespids til Øiet	43	—
Øiets Længde	21	—
Pectoralens Længde	111	—
Caudalens Længde oventil	149	—
— — nedentil	167	—
Legemets største Bredde (bag Pectoralerne)	75	—

Farve. Hvidplettet. Ovenfor Sidelinien ere de hvide Pletter talrige, omtrent 2 mm. i Diameter; ingen Pletter nedenfor Sidelinien.

I selve Sidelinien ere Pletterne tættest, og danne en sammenhængende Række; ovenfor denne Række ere Pletterne uregelmæssigere stillede, noget større, og danne 1—2 Rækker. Hen mod Halespidsen ere de atter færre.

Paa Hovedet gaar en kort bueformig Række af hvide Pletter fra Spiracula nedover mod Undersiden.

Ventrikelen indeholdt Crustaceer, nemlig talrige Unger af *Carcinus maenas*, med en Diameter af omtrent 25 mm.; desuden en noget større Unge af *Lithodes arcticus.*

Tarmen indeholdt talrige Entozoer.

Udbredelse. Denne Art er hyppig i Middelhavet og ved Sydvest-Europas Kyster, og har været kjendt af de ældste Forfattere, men har senere jevnlig været sammenblandet med en anden nærstaaende Art *G., (Mustelus) laevis,* (Risso) 1826, der er synonym med *G. (Mustelus) equestris,* Bonap. 1838.

Især er den talrig i Middelhavet og Adria, er truffet ved Tunis (Vinciguerra), og gaar her mod Vest idetmindste til Sicilien.

I Atlanterhavet er den ligeledes hyppig op til Canalen, og er erholdt paa de fleste Steder ved de britiske Kyster, medens den normalt ikke synes at forekomme ovenfor Nordsøen. Den er ikke anmærket ved Danmarks eller Sveriges Kyster.

Derimod er en Art talrig ved Nord-Americas Øststater, som allerede i 1815 blev beskrevet af Mitchell under Navn af *Squalus canis*, og som af de americanske Forskere ansees

Trykt den 9de April 1897.

som identisk med den europæiske. Under den Forudsætning, at dette er Tilfældet, opføres her Arten under Navnet *M. canis*, idet Mitchells Navn har Prioritet fremfor dem, under hvilket den hidtil har været kjendt fra de europæiske Have.[1])

Fam. **Chlamydoselachidae.**

Chlamydoselachus anguineus, Garm. 1884.

Chlamydoselachus anguineus, Garm. Bull. Essex Instit. Vol. XVI, Jan. 17, p. 3 (Salem 1884); Bull. Mus. Comp. Zool. Harw. Coll., Vol. XII, p. 1 (Cambr. Mass. 1885). Japan.

Clamydosache anguinea, Günth. Rep. Scient. Res. Voy. Challenger, 1873—76, Zoology, Vol. XXII, p. 2, Pl. LXIV, LXV (Edinb. 1887). Japan.

Chlamydoselachus anguineus, Coll. Bull. Soc. Zool. France 1890, Tome XV, p. 219 (Paris 1890). Madeira.

Localitet: Varangerfjorden 1896.

Et stort Individ blev fanget 4de August 1896 i et Bundgarn ved Bugønæs i Varangerfjorden, og af Commandør Salvesen indkjøbt og nedsendt som Gave til Universitets-Museet i Christiania, hvor det nu opbevares.

Det viste sig at være en udvoxet Hun, og har en Totallængde af 1910 mm.; Hovedets Længde var 195 mm. Legemets Høide 165 mm.

---

[1]) En nærstaaende Form, *Galeorhinus galeus*, (Lin.), som tilhører Syd- og Vest-Europa, og flere Gange er truffen i Norge, er tidligere ofte opført under Navnet *Galeus canis*, Bonap. 1838.

Exemplaret, som nu er udstoppet, vil paa et andet Sted blive udførligere beskrevet.

Udbredelse. Arten er tidligere blot fundet i nogle faa Individer ved Japan; et yngre Individ erholdtes i Marts 1889 ved Madeira.

Fam. **Trichiuridae.**

Trichiurus lepturus. Lin. 1766.

Trichiurus lepturus, Lin. Syst. Nat., Ed. XII. p. 429 (1766).

Localitet: Christianiafjorden 1896.

Et enkelt Exemplar er fanget i Christianiafjorden mellem Holmestrand og Horten 7de October 1896, og indsendtes til Universitets-Museet. Det var taget i et Bundgarn, udsat for Torsk.

Dette Exemplar, der befandt sig i fortrinlig Stand, havde følgende Maal:

Totallængde	803 mm.
Hovedets Længde	103 —
Legemets Høide	61 —

Hovedet indeholdes saaledes omtrent 8 Gange i Totallængden.

Tænderne: I Overkjæven findes forrest 1 lang Tand; derpaa følge i Kjævens horizontale Halvdel 6 smaa Tænder (og 1 noget længere indenfor den 4de af de smaa); dernæst i Kjævens indre, skraat nedadløbende Del 10 kortere Tænder, der aftage i Størrelse indad.

I Underkjæven er den forreste lange Tand noget kortere, end i Overkjæven; forresten ere Tænderne omtrent, som i denne.

Dorsalen indeholdt omtrent 150 Straaler.

Udbredelse. *Tr. lepturus* har en vid Uddredelse i næsten alle Verdenshave, men gaar ikke længere mod Nord, end til omtrent 50° N. B. Den synes at være en pelagisk Form, men som til visse Aarstider antagelig er mere litoral.[1])

I Atlanterhavet forekommer den især i de varmere Dele, fra Sydvest-Europa ned til Syd-Africa; paa den americanske Side er den truffen fra Nord-Americas Øststater saa langt mod Nord, som ved Virginia, er talrig langs Vest-Indien, og forekommer endnu ved Brasilien. Endelig forekommer den i det Stille Ocean op til Nedre Californien. Hvis et Par nærstaaende Former skulde vise sig at være identiske med *Tr. lepturus*, vil dens Udbredelse blive betydeligt udvidet.

Ved de europæiske Kyster er den idethele sjelden eller sporadisk. I Middelhavet synes den saaledes næsten helt at mangle, men angives dog fra Grækenland af Apostolidès[2])

Ved Portugals Kyster er den sjelden, ligesaa i Golfe de Gascogne, hvor blot enkelte Individer ere kjendte. Der-

---

1) Lütken, *Spolia Atlantica,* (Kgl. D. Vidensk. Selsk. Skr. 5 Række, Naturv. Math. Afd., 12 B., p. 451. Kbhvn. 1880.)

2) Pêches en Grèce, p. 22. (Athènes 1883).

imod er den flere Gange erholdt i Canalen, og den angives endog som temmelig talrig her i enkelte Aar i Vintermaanederne.[1])

Fam. **Centrolophidae.**

Centrolophus pompilus, (Risso) 1810.

Coryphaena pompilus, Risso, Ichthyol. de Nice, p. 180 (1810).[2])
Centrolophus pompilius, (et *C. liparis)*, Risso, Hist. Nat. Eur. Mér. Tome III, p. 336—337 (1826).
Centrolophus pompilus, Cuv. Val. Hist. Nat. Poiss. Tome IX. p. 334 (1833).

Localitet: Trondhjemsfjorden 1886.

2 Exemplarer af denne Art, der hidtil ikke var truffet nordenfor de Britiske Øer, fangedes 8de September 1886 i Sildegarn ved Bynæsset i Trondhjemsfjorden, omtr. 11 Kilom. vestenfor Trondhjem. Begge afgaves til Museet i Trondhjem; gjennem Conservator Storms Velvilje blev det ene (a) overladt til Universitets-Museet.

---

1) Day, Fishes of Great Brit. and Ireland, Vol. I, p. 155 (1880—84).

2) Det er ikke usandsynligt, at ogsaa Linné og andre af de ældre Forfattere have kjendt denne Art; men af de korte Beskrivelser af deres *Coryphaena pompilus*, Linné og Gmel., *Coryphaena pompilus* og *Centrolophus niger*, etc., Lacep., fremgaar det, at de i alle Tilfælde ikke alene har havt nærværende Art for Øie. Derimod er det mindre tvivlsomt, at Risso i 1810 i sin "Ichthyologie de Nice" som *Coryphaena pompilus* beskriver en Farve-Varietet af denne Art, og fra ham bør derfor Artens Benævnelse derfor dateres.

Exemplarerne vare udvoxede, med en Totallængde af 425 mm. og 449 mm.; de vare delvis exviscererede, da de bleve afgivne til Museerne, hvorfor deres Kjøn ikke har kunnet constateres.

Udmaalinger.

	a.		b.	
Totallængde	425	mm.	449	mm.
Længde til midt mellem Caudalfligene	393	—	412	—
Snuden til Dorsalens Bagrand	289	—	298	—
Snuden til Dorsalen	96	—	108	—
Snuden til Anus	182	—	198	—
Længde fra Anus til Halespidsen	240	—	260	—
Hovedets Længde	80	—	84	—
Snudens Længde	20	—	22	—
Øiets Længde	19	—	19	—
Hovedets postorbitale Del	40	—	43	—
Legemets Høide	94	—	99	—
Halerodens Høide	30	—	31	—
Dorsalens Grundlinie	202	—	203	—
Analens Grundlinie	112	—	112	—
Caudalens Længde	87	—	95	—
Længste Dorsalstraale	40	—	40	—
Pectoralens Længde	48	—	48	—
Ventralens Længde	30	—	31	—

Finnestraalernes Antal:

a. D. 41; A. 25; P. 21; V. 6.
b. D. 47; A. 24; P. 21; V. 6.

Dorsalen har fortil 4 smaa, tynde Pigstraaler, hvorefter følge 2 grenede; alle disse staa med længere Mellemrum indbyrdes, end de øvrige; de bagerste Dorsal- og Anal-straaler ere omtrent halvt saa lange, som de længste i hver Finne.

Analen har 2 enkelte Straaler fortil.

Farven er mørkt graabrun.

Udbredelse. *C. pompilus* er en pelagisk Form, og har sin fornemste Udbredelse i Atlanterhavets vestlige Dele og i Middelhavet. Den synes næsten overalt at optræde temmelig sparsomt; alene fra Nizza angives den at være temmelig almindelig. Den forekommer iøvrigt langs de italienske Kyster ned til Sicilien, og i Adria op til Triest, hvor Dr. Gräffe ofte har truffet de ganske unge Individer (med en Totallængde af 30—40 mm.) under *Rhizostoma*, sjeldnere de udvoxede.[1]) Omkring Spanien og Portugal er den sjelden, ligesaa i den Biscayiske Bugt og ved Frankrigs Kyster. Adskillige Individer ere imidlertid i Aarenes Løb erholdte ved de britiske Kyster, især i Canalens sydlige Dele. Det nordligste Sted, hvor den vides at være trængt frem, er til Trondhjemsfjorden i Norge (63° 20′), hvor de ovennævnte 2 Individer i September 1886 bleve fangede.

Endelig er denne Art erholdt ved Madeira og Azorerne. I de vestlige Dele af Atlanterhavet vides den ikke hidtil bemærket.

---

[1]) Arb. Zool. Inst, Wien, Tom. VII, p. 465 (1886).

Fam. **Scombridae.**

Auxis thazardus, (Lacep.) 1802.

Scomber thazard, Lacepède, Hist. Nat. Poiss. Tome III, p. 9 (L'an X de la République, 1802).
Scomber rochei, Risso, Ichthyol. de Nice, p. 165 (1810).
Auxis vulgaris, Cuv. Val., Hist. Nat. Poiss., Tome VIII, p. 139 (1831).

Localitet: Christianiafjorden 1887 og 1890.

2 Exemplarer af denne Art ere i de sidste Aar om Høsten fangede i Bunden af Christianiafjorden, begge udvoxede eller nær derved.

Det første af disse erholdtes 17de September 1887 udenfor Røkenlandet, det andet i Bundefjorden 17de September 1890. Begge Exemplarer opbevares paa Universitets-Museet.

Udmaalinger:

	a.	b.
Totallængde	386 mm.	433 mm.
Hovedets Længde	93 —	101 —
Legemets Høide bag 1 D	85 —	104 —
Legemets Høide midt over 1 D	80 —	89 —
Snudespids til 1 D	109 —	120 —
Grundlinien af 1 D	50 —	40 —
Høiden af 1 D	38 —	35 —
Grundlinien af 2 D	20 —	22 —
Høiden af 2 D	14 —	14 —

Grundlinien af A	20 mm.	22 mm.
Høiden af A	14 —	14 —
Høiden af C	86 —	99 —
Længde af P	37 —	42 —
Snudens Længde	22 —	22 —
Øiets horizontale Diameter	18 —	19 —

Straaleantallet var:

a. 1 D. 10; 2 D. 1—11; A. 2—11; Smaafinner $\left\{ \frac{\text{VIII}}{\text{VII}} \right.$

b. 1 D. 9; 2 D. 1—11; A. 2—11; Smaafinner $\left\{ \frac{\text{VIII}}{\text{VII}} \right.$

Begge de erholdte Exemplarer, der saaledes vare fangede paa samme Dag med 3 Aars Mellemrum, vare Hanner; Testes vare hvilende, og ikke særligt udviklede.

Udbredelse. *Auxis thazardus*, den eneste sikkert bekjendte Art af sin Slægt, har en vidtstrakt geographisk Udbredelse, idet den forekommer ogsaa i det Stille Hav ved Ny-Guinea (hvor Arten oprindelig var fundet af Commerson i 1768), og op til Japan.

I Atlanterhavet er den truffen sparsomt ved Madeira (Lowe), samt langs Nord-Americas Kyststater, hvor den i de senere Aar har vist sig i stort Antal lige ned til Vest-Indien.

I Middelhavet er den tildels talrig (saasom omkring Sicilien), men i Regelen sparsom; den synes at mangle i dette Havs østlige Dele[1]).

---

[1]) Den er ikke optagen i Hoffmann & Jordan's "Catalogue of the Fishes of Greece" (Proc. Acad. Nat. Soc., Philad. 1892, p. 230); dog nævne Cuvier og Valenciennes i 1831 (Hist. Nat. Poiss. Tome VIII, p. 144), at de gjennem Bory de Saint Vincent have modtaget Expl. "de Morée".

Fra Vest-Europa er den hidtil blot kjendt som en tilfældig Omstreifer. Steindachner erholdt enkelte Exemplarer ved Spaniens Syd-Spids (Ichthyol. Ber. Span. Port. Reise 1868), ligesom den i Aarenes Løb flere Gange har vist sig ved de britiske Kyster (Day).

Fra Scandinavien var hidtil blot et enkelt Exemplar kjendt, fanget ved Kysten af Skaane (i Femti-Aarene), og omtalt og afbildet af Nilsson (Öfv. Kgl. Vet. Akad. Förh. 1864, p. 500, Pl. VI).

Fam. **Mugilidae.**

Mugil auratus, Risso 1810.

Mugil auratus, Risso, Ichthylogie de Nice, p. 344 (1810).

Localitet: Christianiafjord 1880, 1896, Hvaler 1896.

Den 15de Juni 1880 erholdtes ved Holmestrand (i Christianiafjorden) et stort Exemplar af denne Art, der afgaves til Universitets-Museet.[1])

Dette Exemplar er fuldt udvoxet, og har en Totallængde af 515 mm.; Længden til Spidsen af de mellemste Caudalstraaler er 455 mm.

---

[1]) I det 2det Hoved-Supplement til Norges Fiske "Meddelelser om Norges Fiske i Aarene 1879–83," (Nyt Mag. f. Naturv., 29 B., p. 72, 1885) er dette Individ omtalt som tilhørende *M. capito.* I 1892 blev det under sit rette Navn omhandlet af Prof. Smitt i hans "Skandinaviens Fiskar" etc. (2 Uppl., 1 Del, p. 339, Stockh. 1892).

Hovedets Længde er 110 mm. og indeholdes saaledes 4,68 Gange i Totallængden. Legemets Høide er 90 mm., og indeholdes i Totallængden 5,6 Gange.

Pectoralens Længde er 78 mm.; den længste (2den) Straale i 1ste Dorsal har en Længde af 41 mm., og indeholdes saaledes 2,6 Gange i Hovedets Længde.

M. auratus har ogsaa senere vist sig ved Landets Kyster. Den 19de October 1896 toges i Garn ved Hvalerholmene udenfor Fredriksstad 3 Individer, hvoraf det ene blev bortkastet, de 2 andre indsendtes til Universitets-Museet. Begge disse vare unge, omtrent halvvoxne. Den 17de November samme Aar toges atter et Individ i Sildegarn udenfor Engelsvigen i Onsø (Smaalenene), altsaa i Nærheden af det Sted, hvor de førstnævnte erholdtes.

Ogsaa det sidste Exemplar er ungt, ubetydeligt mindre, end de foregaaende, og har muligens oprindelig tilhørt samme indvandrede Stime.

Alle 3 Exemplarer opbevares paa Universitets-Museet i Christiania.

Udmaalinger af disse yngre Individer.

	a.	b.	c.
Totallængde	253 mm.	263 mm.	272 mm.
Hovedets Længde	49 —	49 —	53 —
Legemets Høide..........	45 —	49 —	50 —
Pectoralens Længde	36 —	40 —	40 —
Ventralens Længde.......	26 —	28 —	28 —

Saaledes indeholdes hos disse unge Individer Hovedets Længde 5,1 til 5,3 Gange i Totallængden, Legemets Høide 5,3 til 5,6 Gange i denne.

Sammenlignet med de 2 øvrige indenlandske Arter (*M. chelo*, Cuv. og *M. capito*, Cuv.) er *M. auratus* kjendelig ved sin relativt lange Pectoral, der her har mindst samme Længde, som Legemets Høide over Pectoralens Rod, (oftest er den betydeligt længere), medens den hos de 2 øvrige Arter er betydeligt kortere, end denne Høide. I Totallængden indeholdes Pectoralen 6,5 til 7,0 Gange.

Det store Individ (fra 1880) var fuldt udvoxet, og Arten opnaar sandsynligvis sjelden en betydeligere Størrelse. Det var en Han, med store og svulmende Testes; Ventrikelen var tom.

Den guldgule Plet paa Operculum har hos det store Individ neppe været særligt fremtrædende, og er nu aldeles forsvundet. Hos de yngre Individer var den særdeles iøinefaldende, intens farvet, og skarpt begrænset.

Udbredelse. *Mugil auratus* er fornemmelig udbredt i Middelhavet, hvor den paa de fleste Steder er talrig, idetmindste mod Øst til Sicilien.

I Atlanterhavet er den funden mod Vest ved Madeira og Canarerne, og forresten langs Portugals og Frankrigs Kyster op til Canalen, hvor den viser sig sjeldnere. Ved Englands Kyster forekommer den sparsomt,[1]) og den synes ikke regulært at overskride Nordsøen; et Exemplar er fanget i Kattegat i October 1852, og opbevares paa Museet i Kjøbenhavn; et andet er fanget udenfor Strömstad i August 1877, og indsendtes til Riks-Museum i Stockholm.

Endelig foreligge de ovennævnte Exemplarer fra Christianiafjorden 1880 og 1896; ved den sidste Leilighed synes en hel Stime at have berørt Landets Sydkyst.

---

[1]) Den er helt forbigaaet i Days store Værk: "Fishes of Great Britain and Ireland." (London 1880—84).

Fam. **Sudidae.**

Sudis kröyeri, (Lütken) 1891.

Paralepis kröyeri, Ltk. Vid. Medd. Naturh. Foren., Kbhvn. 1891, p. 222 (1891). Island, Grønland.

Localitet: Sørøen, Vestfinmarken (omtr. 1885).

Under et Ophold paa Hasvig paa Sørøen (nær Hammerfest) i Juli 1894 havde jeg Leilighed til at undersøge et stort Glas, indeholdende en Del Fiske og Invertebrater, som Stedets Eier, Kjøbmand Bull, efterhaanden havde indsamlet her. Blandt disse fandtes et Par for vor Fauna sjeldne Fiskearter (*Scopelus elongatus,* og *Scopelus mülleri),* foruden et Exemplar af en *Sudis,* som viste sig at tilhøre *S. kröyeri.* Exemplaret, som var slet vedligeholdt, var udtaget af Ventrikelen af en større Fisk omkring 1885, og opbevares nu i Universitets-Museet i Christiania.

Exemplarets Undersøgelse har været noget vanskelig, og dets nøiere Beskrivelse i flere Henseender usikker, da Caudalen var afbrudt, Finnestraalerne utællelige, og Huden fordetmeste afrevet eller opløst, men den svarer i alle sine tilgjængelige Detailler til Lütkens Beskrivelse (1891) af Arten i »Korte Bidrag til Nordisk Ichthyographi VIII» p. 20.[1]) Noget nyt Bidrag til denne iøvrigt lidet kjendte Arts Diagnose kan derfor neppe uddrages af det forhaandenværende Exemplar.

[1]) Vidensk. Medd. Naturh. Foren., Kbhvn. 1891, p. 222.

Beskrivelse.

Totallængde........................	omtrent	242 mm.
Længde til Enden af Hvirvelsøilen (Lütkens Totallængde)..............................		234 —
Hovedets Længde........................		49 —
(Snuden 23 mm., Øiet 10 mm., Hovedets postorbitale Del 16 mm.).		
Snudespidsen til Dorsalen.....................		148 —
Snudespidsen til Ventralen...................		164 —
Legemets Høide...........................		19 —
Afstand fra Fedtfinnen til Caudalen............		4 —

Hovedet indeholdes saaledes næsten 5 Gange i Totallængden (4,93), eller $4^3/_4$ Gange (4,77) i Legemets Længde til sidste Halehvirvel (Lütkens Totallængde).

Øiet indeholdes i Hovedlængden ikke fuldt 5 Gange (4,90); i Snudelængden lidt under $2^1/_3$ Gange (2,30), i Hovedets postorbitale Del lidt over $1^1/_2$ Gang (1,60).

Legemets Høide indeholdes i Totallængden $12^2/_3$ Gange (12,77), i Længden til Enden af Hvirvelsøilen $12^1/_3$ Gange (12,31).

Ventralerne sidde tydeligt bag sidste Dorsalstraale; Fedtfinnen er ganske nær Caudalen.

Sidelinien kan forfølges indtil i omtrent en Hovedlængdes Afstand fra Caudalen, og tæller til dette Punct 62 Porer; paa det manglende Stykke (Huden er her afrevet) har antagelig været omtrent 14 Porer, tilsammen 76 Porer.

Ganens lange Tænder ere 6, Underkjævens 10. Iøvrigt er Tandvæbningen som af Lütken beskrevet.

Udbredelse. I 1891 har Prof. Lütken kritisk gjennemgaaet det Materiale af høinordiske Former af denne Slægt, som opbevaredes i Museet i Kjøbenhavn. Dette

Materiale, som tæller kun faa nogenlunde vel vedligeholdte Exemplarer, men flere Brudstykker, er væsentlig tilveiebragt gjennem de ældre Forskere Reinhardt og Kröyer, som sammenfatte dem under den fælles Benævnelse *Paralepis borealis.* Lütken har vist, at disse udgjøre 2 adskilte Arter, hvoraf den ene, som er kjendelig afbildet i de store Gaimard'ske Reiseværk i 1851,[1]) og hvoraf Exemplarer foreligge saavel fra Island, som fra Grønland, er givet Navnet *Paralepis kröyeri,* medens den anden, oprindelige Reinhardt'ske Form, bør beholde Navnet *P. borealis.*[2])

Som ovenfor nævnt, eier Museet i Kjøbenhavn af *Sudis kröyeri* nogle faa mere eller mindre slet vedligeholdte Exemplarer eller Brudstykker, alle fra de ældre Indsamlinger paa Grønland og Island.

Ved de europæiske Kyster vides *S. kröyeri* ikke tidligere med Sikkerhed iagttagen.

Fam. **Cyprinidae.**

Abramis blicca, (Bloch) 1782.

Cyprinus blicca, Bloch, Naturg. Fische Deutschl. B. I, p. 65 (1782).

Localitet: Ødemark (Smaalenene) 1891, og senere.

Universitets-Museet har et Par Gange i de senere Aar modtaget Exemplarer af denne Art fra Ødemark-Sø, en af Grændse-Søerne mod Sverige.

---

1) Voyage Isl. Groenl. 1835—36, La Recherche, Paris 1851.

2) Hertil kommer den af Kröyer som særskilt beskrevne *Paralepis atlanticus,* opstillet efter et Exemplar, der i Mai 1865 strandede ved Skagen, og hvis rette Forhold til de 2 øvrige nordatlantiske Arter endnu neppe kan fastsættes med Sikkerhed.

De første Exemplarer vare fangede den 22de Juni 1891 i Nærheden af Ørje Brug ved den nævnte Sø af Brugseier Nordbye.

Det største af disse Exemplarer havde en Totallængde af 275 mm.; Hovedets Længde 46 mm.; Legemets Høide 98 mm.

Hos de 3 indsendte Individer havde Sidelinien 46, 46 og 47 Skjæl.

Senere er (i August 1893) atter indsendt Exemplarer af lignende Størrelse fra den samme Sø.

Ifølge Hr. Nordbye forekommer denne Art sandsynligvis paa flere Steder i det Fredrikshaldske Vasdrag.

I Ødemarksø er den kjendt under Navnet «Sørv». Den er her temmelig talrig, og vel kjendt af Befolkningen. I stort Antal forekommer den ligeledes i Jøl-Sø, en omtrent 5 Kilometer lang, smal Indsø kort østenfor Ødemark-Sø. Fra andre Localiteter er den endnu ikke med Vished paavist.

Den gaar ikke under Land, undtagen i Legetiden (sammen med *A. brama*), lidt før Midten af Juni. Den bider aldrig paa Krog, og fanges ikke, ligesom det leilighedsvis kan være Tilfældet med *A. brama*, til andre Aarstider. Den ansees for en næsten værdiløs Fisk, og er ikke Gjenstand for Fangst.

Udbredelse. I en stor Del af Europa er denne en paa mange Steder talrigt optrædende Art. I Sverige er den funden ialfald op til den nordlige Del af Helsingeland (omkring 62° N. B., ifølge Lilljeborg). Günther anfører,[1]) at British Museum eier Exemplarer af denne Art fra Muonio-Elv (Grændse-Elv mellem Svensk og Russisk Lapmarken), eller under 68° N. B., indsamlede af Mr. Wheel-

---

[1]) Cat. Fish. Brit. Mus., Vol. VII, p. 307 (1868).

wright. Iøvrigt forekommer den paa talrige Localiteter i Mellem- og Syd-Sverige, samt i den nordlige Del af Østersøen og den Bottniske Bugt. I Finland gaar den op til 63° 40′ N. B. (ifølge Mela). I Rusland har den en vid Udbredelse, ligesom i Danmark, England, Holland, og i de fleste Egne af Mellem-Europa med Schweiz, ned til Alperne.

OM SANDSYNLIGHED

OG DENS BETYDNING LOGISK BETRAGTET

AF

DR. ANATHON AALL

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1897

ARCHIV FOR MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB. B. XIX. Nr. 9.

Om sandsynlighed og dens betydning logisk betragtet.*)

Livets mangfoldighed afspeiler sig i den rigdom af forestillingsnormer, de kategorier, hvormed der logisk opereres i det menneskelige sjæleliv: I tankelivet iagttages der tendens til at indskyde mellemformer mellem extremerne. Paa ethikens gebet har dette indført mellem ret og uret kategorien billighed, som ikke betyder streng ret, endnu mindre uret, men et mellembegreb. Samme logiske tilbøielighed forraader sig i opstillingen af kategorien sandsynlighed, som ikke betegner vished, endnu mindre vilkaarlig vankundighed, men et mellembegreb.

Til forstaaelsen af vor kategori er det oplysende at undersøge, hvilke betegnelser der her fremtræder inden forskjellige folk, hvis filosofi ligger indenfor omraadet af vor opmerksomhed. Til betegnelse af det sandsynlige møder os paa græsk ordet εὔλογον = det der har λόγος, god grund for sig, det der er vel begrundet og fornuftmæssig. Inden

*) Nærværende kritiske undersøgelse, der har været foredraget som prøveforelæsning for doktorgraden i filosofi, vil ikke være noget bidrag til løsningen af det mathematiske sandsynligheds-problem, men turde være logisk orienterende for læsere, der fra mathematiken har hentet interesse for den videnskabelige sandsynlighedsidé.

det nyere akademi og navnlig hos Arcesilaos er det kunstordet for vort begreb, hvilket denne skole just har fortjenesten af at have indført i filosofien. Med τὸ εὔλογον alternerer τὸ πιθανόν af roden πείθω, overtaler. Udtrykket betegner altsaa det, der anbefaler sig til at antages. Hertil svarer det latinske *probabile,* hvilket ord ogsaa er gaaet over i fransk, og som i engelsk er den typiske betegnelse. Roden: *probare,* at give noget sin tilslutning, antage det for trolig. Ved siden heraf løber en anden række udtryk, som kan siges at slutte sig nærmere til begrebets logiske eiendommelighed, saaledes som det genetisk er begrundet. Foruden de ovennævute ord har grækerne ogsaa τὸ εἰκός samt endelig ἔμφασις; sidste ord (dannet af ἐμφαίνομαι) betyder afspeiling, speilbillede; udtrykket danner en direkte forestillingsanalogi med τὸ εἰκός, som betegner det, der har billedlighed. Paa latin har vi *verisimile:* det, der har lighed med *verum,* det sande; ordet er kurant i fransk, hvor det lyder *vraisemblable,* medens det engelske *versimilar,* som vi finder hos ældre klassikere, formodentlig er forekommet for reflekteret til at finde indgang i sproget. Det fuldstændigste sproglige sidestykke hertil danner det tyske *wahrscheinlich,* vort *sandsynlig,* svensk *sannolik,* (hvormed kan sammenlignes det engelske adverbium *likely*). Her foreligger sprogpsychologisk samme fænomen, og det synes rimeligt at antage, at de forskjellige ord har sproghistorisk forbindelse. Forudsætningen for vocabulets dannelse er en logisk abstraktion, efter hvilken væsen og udseende er holdt ud fra hinanden. Skepsis med hensyn til det adækvate i sanseforestillinger maa — efter en nærliggende slutning — være mindst lige gammel som vort begreb. Forøvrig er ved sidste række af betegnelser den etymologiske analogi til begrebet efter dets logiske betydning meget karakteristisk.

Wahr, som første led i det tyske ord *wahrscheinlich* lyder, er rodbeslægtet med det latinske *verus;* tilligemed analogier i gothisk og angelsaksisk synes det at gaa tilbage paa *sein*, indogermanisk rod *es*. *Wahr* blev da altsaa etymologisk «*seiend*». Ogsaa det latinske *verus* synes kongruent hermed, idet som rod for ordet kan betragtes det indogermaniske *wes* = *være*, sammenlign *væsen*. Som *wahrscheinlich* eller *sandsynlig* blev altsaa efter denne forestillingsbevægelse det betegnet, som stod i positivt om end ikke decideret forhold til *væren*, det som man kan antage *er* saa eller saa.

En definition af begrebet selv kan tage sit udgangspunkt i denne kjendsgjerning fra sprogpsychologien. Søger vi at beskrive den forestilling, vi knytter til dette begreb, saa kan følgende almindelige forklaring gives:

Om sandsynlighed kan der tales, hvor i et forhold, hvis sande sammenhæng ikke kan apodiktisk fastsættes, plausible grunde kan anføres for, at sagen er saa eller saa.

En nærmere undersøgelse af forestillingen vil imidlertid snart overtyde en om, at gjenstanden er tvefoldig, og at en inddeling vil maatte foretages, alt eftersom det tilfælde, det dreier sig om, forholder sig til spørgsmaalet om en vis grænse med hensyn paa disse ovenberørte grundes antal, eller til et vist maal med hensyn paa deres vægt.

I daglig tale betegnes som oftest alene de tilfælde som sandsynlig, «fuldt sandsynlig», ved hvilke summen af de gunstige betingelser antages at overskyde summen af de ugunstige betingelser i forhold til et tænkt resultat. (Det er dette, englænderen nærmest udtrykker ved sit «*it is likely to*»). Dette bør fastholdes, og hvad der ikke gaar ind under denne definition, bør stilles i en gruppe for sig. Til en ganske anden forestillingskreds bør nemlig henvises ytringer som: Sandsynligheden derfor er meget liden. Der er *nogen* sandsynlighed for, at osv. Fastholdes første opfatning af begrebets logiske mening, saa skulde sidste ytring være redigeret rent negativt, og udtrykket: Der er ikke megen sandsynlighed for etc. være lig: Det er usandsynligt. Under denne bestemmelse, under kategorien usandsynlig, maatte alle tilfælde indgaa, hvor de positive betingelser ikke overveiede de negative faktorer, eller tilfælde, der ikke ligger, som mathematiken udtrykker det, mellem $\frac{1}{2}$ og 1. Dette for at sikre sig et kritisk standpunkt med hensyn til den populære sandsynlighedsdom. Indenfor mathematiken derimod gjælder lige det omvendte. Sandsynligheden er her et rent kvantitativt begreb, repræsenteret af en uendelig brøkrække mellem 0 og 1. Et ypperligt medium for den mathematiske forestilling besidder det franske (ogsaa det engelske) sprog i ordet *chance*, et begreb, hvorfor det tyske *Fall* (med sammensætninger) byder en kun høist utilfredsstillende erstatning. Den ovenantydede afvigelse fra den betydning, som vi fixerede, ledet af livets praktiske logik, betegner en tilnærmelse til den mathematiske forestilling, hvilken er af et ganske andet indhold. Sandsynligheden har i sidste fald intet reflexbegreb i usandsynligheden. Mathematisk udmaales der kun numerisk visse fiktive eller faste muligheder *(pro & contra)*.

I overensstemmelse hermed faar vor gjenstand et dobbelt udseende, og der maa skjelnes mellem:

1. Den *mathematiske sandsynlighed*. En sandsynlighed, der kun bestaar i et vist talforhold uden hensyn til, hvorvidt momenter af en gruppe *overveier* momenter inden en anden, og
2. hvad man kunde kalde den *problematiske sandsynlighed*, ved hvilken der spørges efter, om visse momenter af en given karakter kan give udslag ligeoverfor eventuelle

andre, som kunde drage i anden retning. Sidste form er bygget efter schemaet af disjunktiv dom, hvor 2:e led i forhold til 1:e er det rent negative eller en contrær mulighed eller et komplex af saadanne.*)

Den mathematiske sandsynlighed er, som det let sees, en renere begrebsgjenstand og ligger den filosofiske drøftelse nærmere. Men den anden form har ogsaa megen interesse og naar høi betydning indenfor psychologien. Jeg vil i det følgende angive, hvor udviklingen kun vil have gyldighed ligeoverfor den ene af disse former, og navnlig hvor noget kun gjælder den problematiske sandsynlighed.

En inddeling er opstillet. Det næste er en undersøgelse af sandsynlighedsbegrebets indre mekanisne:

Ved ethvert tilfælde, hvor spørgsmaalet om det sandsynlige, *Verisimile* (betegnet med *V*), kan reises, er følgende elementer tilstede: For det første tingen *Res* (*R*), der foranlediger problemet, dernæst det hypothetiske udfald eller slutningsforhold *Casus* (betegnet med *K*), endelig den faktor eller de faktorer, hvorpaa et vist i forhold til *K* positivt resultat beror, *Constituenserne* (*C*), og deres modsætning den negative, respektive de negative faktorer, *Incidenserne* (*I*). De to sidste figurer i schemaet kan komme i fællesskab i betragtning, og da de ved den logiske operation maa forestilles, før resultatet kan opstilles, saa synes det ikke upassende, naar vi betegner dem tilsammen som *Antecedenserne* (*A*). De forskjellige momenter i den ene saavelsom i den anden række, den positive som den negative, optræder saaatsige som vidner for og imod *K*. Vi siger selv: Der er meget, som taler for det eller det. (Smlgn. paa engelsk

*) Ikke ganske parallel med denne inddeling er den almindelig i mathematisk og „filosofisk“ sandsynlighed, en inddeling, jeg — som det sees — ikke har fundet fuldt tilfredsstillende.

it tells to). Forholdet mellem den dobbelte række af antecedenser C og I er, som det siger sig selv, det afgjørende for K. Gaar vi ud fra den kategoriske dom som den nærmestliggende, saa er sandsynlighedens formel, formelen for V følgende: $K = \frac{C}{C+I}$. Ved den problematiske sandsynlighed vil da her gjælde, at $I - C$ er en negativ størrelse, medens det om den mathematiske sandsynlighed gjælder, at denne begrebsstørrelse reduceres, alt eftersom differensen $C - I$ nærmer sig 0 eller bliver et negativt tal.

Det ovenfor paaviste forhold kan man udtrykke saaledes

$$V:K = A:I,$$

hvorved erindres, at K i sig skal omslutte de ved I betegnede betingelser.

Eller vi har følgende lov:

1STE FORMEL.

Sandsynligheden er omvendt proportional med incidenserne (de hindrende momenter).

Paa at vurdere disse negative faktorer, de størrelser der gaar imod det imaginerede resultat, maa derfor fremfor alt undersøgelsen gaa ud. Og det vil da navnlig erindres, at disse størrelser (I) ikke kan sammenlignes med de positive faktorer (C), de der taler for hypothesen, efter en rent numerisk maalestok. Antecedenserne er — jeg tænker her selvfølgelig paa den problematiske sandsynlighed — hyppig ikke ensartet, men af forskjellig intensitet. De forskjellige faktorer kan være potenser med hver sin exponent, hvilket naturligvis gjør løsningen endnu mere kompliceret. Meget ofte vil fremdeles en enkelt faktor eller et komplex af saadanne virke solidarisk ind paa et eller flere andre momenter.

Dette er ikke uden lovmæssig betydning for sandsynligheds-beregningen. Et exempel: Der er et skib paa reise direkte fra en fjern havn til en af Stillehavsøerne. Der indtræder en storm, man frygter forlis og finder ogsaa nogen tid efter ganske rigtig skroget drivende om. Spor af mandskabet findes ikke. Spørgsmaalet er, om det er skyllet bort, er gaaet tilgrunde med det kun halvt flydende vrag, eller om nogen endnu har kunnet være reddet. Af oplysninger om, hvor skibet sidst har været praiet, har man relativ sikkerhed for det havstrøg, indenfor hvilket katastrofen maa være indtraadt, og hvor den eventuelle redning altsaa maa have fundet sted. Nu kan følgende betragtninger anstilles:

Der er en mulighed for, at stormen ikke har været saa sterk, at jo baad har kunnet sættes ud fra fartøiet og holde sig oven vande. Redning paa denne maade er ikke umulig, thi absolut ubefaret er det søomraade, det her gjælder, ikke; man regner f. ex. omtrent 4 fartøier som passerer i løbet af den tid, da mandskabet skulde kunne friste livet i en redningsbaad. Af disse 4 er det imidlertid kun et rent tilfælde, om noget skib just stryger indom synskredsen af det sted, hvor baaden har maattet være i drift. Endelig er der mørkt 8 à 10 timer i døgnet og observering under forbifarten fra skibets side egentlig kun paaregnelig i ca. 16 af døgnets 24 timer.

For her at udfinde redningens sandsynlighed vil man maatte gaa frem paa følgende maade:

1. Baade kan under stillehavsstorme gjøres klar, siger vi: hver 3die gang. At her har været mandskab i baad, derfor er der en rund sandsynlighed af $\frac{1}{3}$.

Men da intet land er i nærheden, saa vil redning kun kunne ske ved, at de forulykkede optages af forbi-

passerende skibe. Der, hvor katastrofen maa henlægges, er der en abstrakt mulighed for, at 4 skibe passerer endnu itide. Men at de alle just kommer inden den kritiske rækkevidde, er ikke sandsynlig. Kålder vi den sidst omspurgte sandsynlighed for a, saa er a en brøk
2. mindre end $\frac{4}{4}$, nemlig $\frac{y}{4}$, hvor altsaa $y < 4$.

Endelig kan den eventuelle redning kun foregaa ved lys, men skibet kan passere ogsaa ved nat; hjælpen af flag eller muligheden af at høre gjennem nødraab fra baaden i mørket og natten antager vi for forsvindende; sandsynligheden af, at en baad skulde observeres,
3. sætter vi derfor til $\frac{16}{24}$, idet vi anslaar den mørke tid til 8 af døgnets timer.

Ser vi tilbage paa de fremkomne størrelser, saa har vi

$$\frac{1}{3} \quad \ldots \quad \frac{y}{4} \quad \ldots \quad \frac{2}{3}$$

Disse led staar nu i multiplicativt forhold; første led er $\frac{1}{3}$. Denne sandsynlighed maa imidlertid indskrænkes, og vi gaar over til anden sandsynlighedsstørrelse, som ikke er $\frac{y}{4}$ men $\frac{1}{3} \cdot \frac{y}{4} = \frac{y}{12}$, hvor $y - 4 = -x$ en negativ størrelse.

$\frac{y}{12}$ er altsaa mindre end $\frac{1}{3}$.

Det 3die led er endelig $\frac{y}{12} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2y}{36} = \frac{y}{18}$.

Vi har altsaa rækken $\frac{1}{3} \ldots \frac{y}{12} \ldots \frac{y}{18}$, hvor sidste størrelse er $< \frac{1}{4}$.

Her foreligger en konvergerende række, hvor sandsynligheden ikke er betegnet ved summen, men ved sidste led.

Den sandsynlighed for, at mandskabet er undsluppet katastrofen, som begyndelsesvis syntes $= \frac{1}{3}$, er bleven reduceret til mindre end $\frac{1}{4}$.

Vi har følgende lov:

2den Formel.

Hvor en sandsynlighed ikke er støttet af kjendsgjerninger, men betinget af visse sandsynlighedsdata, bliver graden af den omspurgte sandsynlighed med hvert nyt sandsynlighedsdatum, der træder til, aftagende proportionalt med dettes sandsynlighedsgrad.

Omvendt vil man uden vanskelighed positivt kunne eftervise, hvorledes **paa samme maade en sandsynlighed støttet ved kjendsgjerninger, stiger med enhver saadan.**

Den dobbelte her opstillede regel kan tjene som en explikation af den mathematiske lov:

En sammensat sandsynlighed er produktet af enkeltsandsynlighederne.

Nogle modale eiendommeligheder fortjener ved siden af disse mere kvantitative bestemmelser vor opmerksomhed. De har navnlig anvendelse paa det problematiske sandsynlighedsbegreb. Sandsynlighedens korrelat er mulighederne. I en sandsynlighedssætning er sandsynlighed og mulighed reflexbegreber, men reflexforholdet er ensidigt. Muligheder kan der være uden sandsynlighed; men ingen sandsynlighed uden muligheder for noget andet, disse muligheder være nu klart opfattede eller ikke. Der kan kun være tale om noget sandsynligt da, naar noget andet ikke er umuligt. Man kan formulere et sandsynlighedsproblem efter schemaet af en dobbelt, disjunktiv dom.

Exempel. Det er sandsynligt, at N. er druknet.
Der er tvende muligheder for, at N. ikke er druknet.

Kan nu her de opstillede muligheder ophæves ved negativ dom, saa har vi en analogi til en disjunktiv slutning. Kalder vi den ene negative mulighed for C_a og den anden for C_b, saa synes den logiske bygning at maatte være følgende: Hvis ikke C_a og C_b, saa er V. Nu er hverken C_a eller C_b, altsaa er V. Dette sidste er imidlertid ikke nøiagtigt: Med ophævelsen af undersætningen i ovenstillede dobbeltfigur bliver heller ikke sandsynlighedsdommen længer gyldig. Den bliver omskrevet i en ny domsart. Vi har ikke længer sandsynlighed, men vished. I det mathematiske udtrykkes dette ved, at $\frac{x}{x+y} = 1$, idet $y = 0$. Hvilket samme formuleret med hensyn paa den problematiske sandsynlighed lyder:

3die Formel.

Negation af incidenserne forandrer en sandsynligheds-dom til en assertorisk.

Naturligvis vil det kræve en indtrængende undersøgelse, før man kan substituere denne kategoriske dom. Med nøiagtighed har man først gaaet frem, naar man har udtømt alle muligheder. Dette finder imidlertid ikke sted, udenfor mathematiken; hvor det gjælder den problematiske sandsynlighed, viser erfaringen os, at man antager denne overgang fra sandsynlighed til vished der, hvor chancerne for det negative nærmer sig uendelig 0. Forholdet erindrer os om sandsynlighedsforestillingens psychologiske karakter. En saadan forestilling fremtræder nemlig der, hvor man er klar over, at intet bevis for omvendt forhold er givet vor bevidsthed, men paa den anden side ved, at man endnu ikke fuldt har overskuet den hele række af antecedenser. Er imidlertid skalaen bleven saa høi, at den har naaet et vist maal, saa er bevidstheden beroliget, og kriteriet «relativt» ombyttes med «absolut» — det sandsynlige bliver det visse.

Sandsynligheden bliver saaledes ligesaalidt som muligheden udtryk for et existensialforhold. Den udtrykker en logisk relation. Saavel mulighed som sandsynlighed er subjektiv. En indre forskjel gjør de 2 begreber imidlertid i vor undersøgelse til adskilte gjenstande, noget der ogsaa berettiger til særbestemmelser. Medens muligheden logisk kan betinge en modsætning, fremtræder sandsynligheden altid som et resultat af en saadan, som en kvotient. Det oven paaviste har nu lært os i denne kvotient ikke at vente et positivt tal, men en irrational størrelse,

eller formuleret som lov:

4de Formel.

Den problematiske sandsynlighed udtrykker ikke et forhold til det absolute, men et forhold til et vist antal forestillede betingelser.

I livet maa derfor konsekvent den ene komme til at regne det for en sandsynlighed, som efter den andens udregning er en usandsynlighed.

Noget anderledes stiller sagen sig for den mathematiske sandsynligheds vedkommende. Giver sandsynlighedsberegningen end tidt et temmelig svingende kvotum, saa beror dette paa experimentets egen natur, men skulde hverken hidrøre fra usikkerhed i methode eller uvished med hensyn til de størrelser, den opererer med. Den disponerer over visse fakta og forhold, som den maa gaa ud fra er rigtig. Den større eller mindre objektivitet i resultatet skulde her graduere sig efter den udstrækning, i hvilken *Res* (*R*), de analoge tilfælde, er undersøgt. Og følgende regel lader sig derfor opstille med hensyn til den mathematiske sandsynlighed, naar denne gaar ud paa en ensartet *flerhed* af gjenstande.

5TE FORMEL.

Nødvendigheden tiltager med antallet af led, der er draget ind i beregningen, eller: med antallet af undersøgte størrelser og tilfælde.*)

Den mathematiske sandsynlighedsberegning har allerede bearbeidet et betydeligt materiale. Siden Pascals, Bernoullis og Laplaces dage er for det første formler bleven stillet op for hazard og flere arter af «tilfældets» spil. Saadant har krav paa interesse for tænkningen, da det berører spørgsmaalet om aarsagernes solidaritet, respektive uafhængighed. De indvundne resultater er fremdeles bleven nyttig for statistiken og for flere grene af den videnskabelige forskning. De har fundet anvendelse inden astronomi og fysik, navnlig inden sociologien og overhovedet inden den mere paa det praktiske liv gaaende methodiske forskning: spørgsmaal som antal dødsfald og fødsler, mandlige og kvindelige, livsforsikringer, assuranceforhold i det hele osv.

Disse antydninger med hensyn til den anvendelse, den mathematiske sandsynlighed finder. Vender vi os herfra med spørgsmaal om anvendelse til det omraade, hvor den problematiske sandsynlighed eller begge arter af sand-

*) Exempel fra livsstatistiken: Hvor megen udsigt har en mand paa 20 til at opnaa det 30te aar? Sandsynlighedstallet stiger i sikkerhed med det antal liv, der undersøges.

synlighed har anvendelse, da viser det sig overordentlig vanskelig at bearbeide de forskjellige tilfælde gruppevis. Individet er i livet stillet overfor en række tilfælde hver med sin karakter. Ikke uden en vis berettigelse har de exakte videnskaber vist sig skeptisk ligeoverfor saadan forskning, hvor sandsynligheden indtager en vigtig plads. Den exakte videnskab selv mødes imidlertid inden eget omraade igjen med «denne reminiscens fra en uvidenskabelig tidsalder», nemlig i hypothesen, om hvis anvendbarhed vi senere vil maatte udtale os. Vi vender os her først til de forskningsgrene, inden hvilke sandsynligheden spiller en saa væsentlig rolle, og nævner som saadanne historien, psychiatrien og jurisprudensen. I historieforskningen er sandsynligheden det vigtigste vehikel. Beviserne er her ved tid og ændring i forholdene unddraget en absolut afgjørende og fuldstændig kontrol, dokumentationen bliver en mere eller mindre fyldestgjørende plæderen ved hjælp af visse mere eller mindre indlysende sandsynlighedsdata. Paa evnen til kritisk at udfinde sandsynligheder, smidig at kombinere disse, og paa grundlag af dem med levende indbildningskraft at udkaste billeder, beror det historiske geni. Den historiske dom er væsentlig bygget paa analogier. Naar en kilde, hvis ægthed staar den historiske prøve, indeholder meddelelse af en uinteresseret mand, saa er der altefter denne mands kritiske sans og emnets vanskelighed mere eller mindre afgjort sandsynlighed for, at vi har en rigtig fremstilling, hvilken sandsynlighed historikeren fastslller eller forkaster efter analogier, der ligger ham nærmere eller paa en eller anden maade er ham garanteret.

Samme analogimethode giver sandsynligheder indenfor psychiatrien og psychologien. Ikke blot de i positiv eller negativ retning virkende faktorer, men ogsaa hvad jeg tidligere har betegnet som disses exponent gjør sig, hvor det gjælder psychologiske spørgsmaal, gjældende i en skala, som er uendelig nuanceret. Der kan derfor heller ikke noksom advares mod forhastede slutninger paa det omraade. Altfor raske domme med hensyn til hinandens sindsforfatning og motiver bærer en stor del af skylden for unødig bitterhed og uret i socialt og familiært samliv. Den vise vil nok gjøre sine iagttagelser, men dommen vil han holde mest mulig tilbage, og det vilde ikke være uden grund, om man i de forskjellige menneskers og kredses forhold hertil fandt en maalestok for vedkommendes ethiske kultur. Ikkedestomindre kan livet gjøre det særlig ønskelig, ogsaa ved hjælp af de mindre sikre midler, som vi har i sandsynlighederne, at udvinde en dom. Dette viser sig navnlig indenfor *jurisprudensen,* som drager sig den historiske sandsynlighed til nytte, men navnlig maa have opmerksomheden henvendt paa den psychologiske sandsynlighed og procederer efter analogier. Man tænke paa den civile rettergang og den retslige forfølgning. I hvilken udstrækning er ikke retten og politimyndigheden her henvist til sandsynlighedsdata! Statistiken leverer nogle saadanne. Andre vindes ved en mere eller mindre determineret erfaring om korrelativitet mellem visse ydre fakta og visse psychiske tilstande og psychiatriske forhold. I at udfinde muligheder ligger for en stor del det juridiske skarpsind, og i at udmaale det sandsynlige forhold mellem den dobbelte række af, hvad vi har givet betegnelsen antecedenser, ligger væsentlig, hvad man kalder et godt *judicium.* Det bemerkes her, at historien og psychiatrien har navnlig og jurisprudensen alene interesse for, hvad der i nærværende fremstilling er betegnet som den problematiske sandsynlighed.

En bekræftelse fra en egen kant for sandsynlighedens betydning inden jurisprudensen foreligger i retshistorien, der viser, at sandsynligheden er et af de grundbegreber, der har været medvirkende til dannelsen af en af de vigtigste retsdiscipliner. Det er nemlig blandt andet paa grundlag af sandsynlighedsprincipet, at de romerske prætorer og iurisconsulti har udviklet *ius gentium* eller som den almindelig kaldes *ius naturale,* oprindelig nærmest til brug for de fremmede, som havde krav paa at behandles efter andre hensyn, end hvad der gjaldt for den romerske borger. Et væsentligt begreb, pligtsbegrebet, hentede de fra den saa mægtige stoiske skole, men *ius naturale* fordrer praktisk ogsaa et andet princip anerkjendt. Dette andet princip overgives retsvidenskaben ligeledes gjennem stoikerne, men paa anden haand. Der bliver inden *ius naturale* spørgsmaal om, hvad der er billigt, *æquum.* Men hvad der er billigt, afgjøres efter sandsynlighedsprincipet, og dette princip har de romerske juristers lærere, de senere stoikere, igjen tilegnet sig fra nyakademikerne, den nyere skeptiske form for Platos gamle filosofskole.

Fra disse undersøgelser vender vi os til den opgave at søge bestemmelser vedrørende den betydning for det logiske liv, som der maa tilkjendes vor forestilling. Allerede inden den nysberørte skole, som i sandsynligheden fandt saavel praktisk høieste norm som theoretisk høieste erkjendelsesresultat givet, finder vi flere ikke uefne bestemmelser. Karneades fra 2det aarhundrede f. Kr. lærte allerede, at sandsynlighederne havde forskjellig logisk stringens. En maalestok fandt han i tilknytning til tidligere sandsynligheder, i antal og intensitet af faste indtryk, endelig i frekvensen af beslægtede tilstande eller forhold. Betragter vi disse og de følgende bestemmelser som saadanne, der ved-

Trykt den 30te April 1897.

rører sandsynlighedens logiske karakter og betydning, saa sker det i kraft af en videre betydning, ordet logik har, nemlig som et begreb der i sig indbefatter, foruden bestemte love for tænkningen — dette er den specielle og egentlige logik —, ogsaa andre fænomener, der staar i forhold til vort forestillingsliv og dets funktionsmaade. Vi betragter vort problem først under synspunkt af det almindeligere begreb; til denne undersøgelse vil saa slutte sig en analyse af dets forhold til den specielle logik, de formale tankelove.

Det vil da strax konstateres, at vort normale forestillingsliv opererer med en rigdom af sandsynligheder Begrebet sandsynlighed har som forestilling det psychologiske balancebegreb i overraskelsen. Noget har erfaringsmæssig gjentaget sig ofte, er autoritativt paatrykket inderlig,*) eller staar endelig i vor forestilling i nødvendig forbindelse med kjendte fakta. Overrasket føler vi os da, dersom det forhold det gjælder, og som er saaledes bestemt, ikke viser sig i overensstemmelse hermed, og — interessant nok — denne overraskelse er det ofte, som først gjør os bevidst hvad vi holder for sandsynligt. Navnlig bliver kollisionen mellem det faktisk indtrædende og sandsynlighedsforestillingen følbar, naar sidste grunder sig paa iagttagelse, paa *erfaring*. Autoritet betegner i forhold til erfaring gjennemgaaende et andenrangskriterium. Man fortælle et barn, at Ludvig XIV endnu lever i Frankrige, og selv om dets lærer har med autoritetens afgjørende bevismidler gjort den forestilling i barnet levende, at det menneskelige livsmaal ikke gjør en saadan antagelse trolig, vil det dog maaske give paastanden tiltro. Men man fortælle et (voxent)

*) Herunder rangerer den gamle kvasifilosofiske forestilling, ved hvilken massens dom *(consensus gentium)* nærmede sig rangen af et sandhedskriterium.

erfarent menneske om en person fra denne konges tid, og man lade saa f. ex. følgende ytring falde med hensyn til denne person: Kjende ham selv gjør jeg ikke, og har jeg ikke megen sandsynlighed for at gjøre; thi han er da vist nu baade død og begraven, saa vil udsagnet virke komisk. At en mand, som levede aar 1715, nu er død og begraven, betragter vi ikke som sandsynlig, men som vist, og dog kjender vi ingen nødvendig lov, som siger, at et menneske nok kan blive 100 eller vel endog halvandet hundrede, men derimod ikke 200 aar. Naar vi alligevel gaar simpelthen ud fra, at saa forholder det sig, da beror dette paa, at vort logiske liv ikke er uden surrogat for det manglende lovmæssige bevis. Et saadant surrogat har det nemlig i *analogien.* I tidens løb aflagrer der sig en række saadanne analoginormer i vort bevidsthedsliv, og gjentagende bekræftelser giver den ide, de repræsenterer, karakteren af en sikker lov. Analogislutningen om hvis udstrakte anvendelse paa flere for livet betydningsfulde omraader der ovenfor er talt, faar i sin logiske anvendelse navn af induktion, og betegner en af de hovedformer, i hvilke vort psychiske liv realiserer sig.

Vender vi os nu til en kritisk prøve af den logiske gehalt i en analogidom, saa maa det erkjendes, at denne ikke alene er variabel alt efter de enkelte tilfælde, men ogsaa efter sit væsen af problematisk natur. Der er for det første de enkelte led, der skal subsumeres under et mere generelt begreb. Om disse maa det erkjendes, at de sjelden eller aldrig er identisk, ikke uvæsentlige differenser kan have undgaaet iagttagelsen. Der er for det andet et princip at finde, der i de enkelte tilfælde skal formaa at give partikulære erfaringer rang af universel dom, fra de os bekjendte lade slutte til et almengyldigt forhold. For det naive menneske er kritiken her ofte slumrende. Han har — for at vælge et exempel — indtryk af en fællesegendommelighed hos flyvende dyr, og hans indtryk omformer sig i en dobbelt sandsynlighedsdom, efter hvilken alt, hvad der ikke er insekt og flyver, er fugl, og kun flyvende væsener er fugle (det er: har kro osv.). Dermed har han paa den ene side gjort flagermusen til en fugl, paa den anden side udelukket f. ex. strudsen.

Den sandsynlighed, hvormed induktionen finder sted, trues af en dobbelt mulighed for illusion. De analoge kjendemerker kan være sikre, men retten til at opstille overbegrebet alligevel bestridelig (idet væsentlige differenser hos enkeltfænomenerne kan være undervurderet). Eller man kan have opstillet tilnærmelsesvis udtømmende antal kjendemerker for *genus*, for overbegrebet, men alligevel udføre en urigtig subsumtion, idet man kan have overseet, at enkelttilfældet savner en af de konstitutive kjendemerker.

Denne kritik med hensyn til den methodiske inddeling med paafølgende analogidomme*) fører os over til anden undersøgelse, til at bestemme nærmere vort begrebs forhold til den formale logik.

Indirekte betydning i forhold til denne har vi allerede tilkjendt sandsynligheden, idet vi har erkjendt, at den har en vis rolle indenfor de exakte videnskaber, der ved siden af de rent logiske almengrundsætninger, den gaar frem efter, opstiller og gjør brug af *hypothesen*. Som videnskabelig methodisk middel er hypothesen ikke meget gammel; men

*) Den, der først kritisk indgaaende har undersøgt principerne for induktionen, er Stuart Mill (System of logic, 3 udg. I. 297 ff.), som ogsaa har givet sin kritik anvendelse paa causationsloven, i hvilken den engelske tænker som bekjendt kun ser en *succession* af fænomener.

som forestilling antræffes den allerede hos Aristoteles. Han kjender intet uden den sandsynlige iagttagelse, naar han skal gjøre rede for, hvad der binder de ubevislige første principer til os. Hypothesens anvendbarhed inden forskningen er imidlertid meget begrænset. Dens opgave er at udvikle eller sammenligne imaginerede muligheder. Den kan tjene til at anskueliggjøre visse kjendsgjerninger, ved hjælp af hvilke sandheden maa søges, men at finde sandheden selv paatager den sig ikke, og den stiller ikke vor logiske natur tilfreds. Sin egen ufuldstændige beskaffenhed maa den aldrig gaa af glemme, og den kan siges væsentlig at gaa ud paa at ophæve sig selv.

Hypothesen er logisk beslægtet med det begreb, der ovenfor gjentagende sysselsatte os, nemlig analogien. Om begge begreber gjælder, at de er af foreløbig karakter. Og navnlig maa analogien, der ikke som hypothesen er væsentlig konstruktiv, men selv antyder et vist forestillingsindhold, betragtet i forhold til den rene logik stilles i underordnet gruppe inden erkjendelsesnormerne. Allerede hos logikens fader finder vi dette anerkjendt. Aristoteles har vel ligeoverfor den apodiktiske bevismethode opstillet den saakaldte dialektiske objektsundersøgelse, der med anvendelse af sandsynlighedsgrunde er virksom ved den induktive operation. Men han har anerkjendt denne fremgangsmaades rent propædeutiske betydning, dens logiske svaghed.

Idethele maa erkjendes, at nogen integrerende bestanddel af vort sjælelivs logiske apparat kan sandsynlighedsopfatningen ikke siges at repræsentere. Sandsynligheden har fundet anvendelse i induktionen; den magter ikke at legitimere en deduktion. Logikens gjenstand er fremdeles efter gammel aristotelisk definition beviset; men ligesom en inddeling efter sandsynlighed bliver en uvis og tilfældig, en definition efter sandsynlighed bliver en upaalidelig, saaledes er vort begreb heller ikke brugbart inden den vigtigste af alle methodiske former, beviset. Sandsynligheden selv er jo fremgaaet ved en forestillingsproces, hvor det, der bestemmer udslaget, ikke er en lovmæssig størrelse, men et rent kvantitativt forhold. Den betyder derfor ikke selv sandhed, men en gradualbestemmelse mellem en forestilling og sandheden. *Vor viden bliver ved sandsynligheden intet nyt indhold tilført.* Den kan være et psychologisk væsentligt, stundom eneste præmis for en overbevisning, men er altid hos det kritiske menneske ledsaget af en lidende bevidsthed om, at denne overbevisning da ikke er logisk afsluttet og absolut. Den logiske virksomhed ved dannelsen af en sandsynlighedsdom bestaar i en udmaaling. Og samme kritiske omhu, som i almindelighed har anvendelse under domsdannelsen paa begrebet, maa anvendes ligeoverfor den slutning, man drager paa sandsynlighedspræmisser. Og dog: nødvendig bliver en sandsynlighedsslutning trods al anvendt kritik ikke. Man kan akkumulere de grunde, hvorpaa man bygger en sandsynlighedsdom, til det uendelige, nogen mathematisk vished kommer der dog ikke ud deraf, saalidt som en mands forestilling omsætter sig i kjendsgjerning, i og med den omstændighed at denne forestilling bliver til et folkeønske.

Det oven udviklede kan formuleres i følgende logiske lov:

6te Formel.

Sandsynligheden kan finde anvendelse induktivt til domsdannelse, men den er ikke brugbar (argumentativt) **i en syllogisme til bevis.**

Sandsynligheden som logisk forholdsbegreb modsvares erkjendelsestheoretisk af meningen, hvis væsentlige kilder er umiddelbare sanseindtryk, autoritetstro og fantasi. Men meningen er et logisk svagt resultat og sandsynligheden dens lidet tilfredsstillende forudsætning. Den logiske bestræbelse maa gaa ud paa at hæve det problematiske forhold til et kategorisk. Ogsaa ethiken kan have interesse af, at saa sker. Arcesilaus mente, at for at handle fornuftig er sandsynlighed tilstrækkelig, at besidde viden ikke nødvendig. Men mindes vi hvad vi oven erkjendte, at sandsynligheden ikke udtrykker vor erkjendelses forhold til de absolute, men alene til de overskuede, de i vor bevidsthed forhaandenværende betingelser, saa forstaar vi, hvor uheldsvangert denne theori kan komme til at legitimere illusionerne. Den kan derfor kun passere der, hvor de falske forestillinger staar i fjernere forhold til handlingen. Miskjendelse af begrebets natur kan saaledes vise sig i sine konsekvenser ethisk fatal. Men navnlig har vi at konstatere, at vor *intellekt* peger ud over begrebet. Sandheden kjender ingen sandsynlighed, ligesaalidt som virkeligheden kjender nogen mulighed. Hvad der existerer, er kun kjendsgjerninger samt nødvendighed. For det intuitive blik, der ikke var henvist til diskursivt at erobre sig sine begreber, men anskuede alt uhemmet *(sub specie æterni)*, vilde der ikke findes nogen sandsynlighed, men alene vished. Denne intuition har mennesket ikke naaet. At vi logisk eier begrebet sandsynlighed, er et af de mest authentiske vidnesbyrd om begrænsningen af vor erkjendelsesevne.

Som vi er beskaffen, kan vi ikke godt undvære begrebet. Det hænder stundom, at vi ikke kan dispensere os fra at sætte et resultat, selv om betingelserne ikke lader sig gjennemskue. Livet frembyder et ikke ringe antal af tilfælde, hvor mennesket ikke kan erholde indsigt, uden dog at kunne resignere derpaa. Han maa handle, og skal ikke handle i blinde; han maa komme til en opfatning, og kan ikke vælge sig den paa maafaa. I saadanne tilfælde bliver sandsynligheden en ganske væsentlig logisk faktor, idet den alene erfaringsmæssig formaar at udløse en handling eller foranledige en dom. Idealet er da, at handlingen bliver minimal og dommen provisorisk. Flere saadanne omraader, hvor vi har behov af at forme anskuelse, har vi allerede betragtet. Vort erkjendelsesliv producerer og projicerer sig blandt andet i historieforskning, i psychologi og jurisprudens. Fremforalt: Livet kræver initiativer.

Sandsynligheden har da fortjeneste af at bringe os i approximativt forhold til en handlings ideale, en tilstands normale og en sandheds reale væsen.

NOGLE

MAGNETISKE OBSERVATIONER

I NORDMARKEN OG I CHRISTIANIA

AF

H. GEELMUYDEN

MED EN GRAFISK FREMSTILLING

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1897

Nogle magnetiske Observationer i Nordmarken og i Christiania.

Af
H. Geelmuyden.

I de udstrakte og høitliggende Skovtrakter nordenfor Christianiadalen blev jeg under en Vandring Sommeren 1895 opmærksom paa, at den magnetiske Misvisning paa en Høide i Nærheden af Fjeldet Kikud syntes at afvige temmelig meget fra den paa disse Kanter sædvanlige. Saavidt jeg kunde bedømme ved Hjelp af Kartet og et ganske lidet Lommekompas, saa den ud til at være en Smule østlig, medens den i Christiania er ca. 12° vestlig. Jeg har derfor i Sommeren 1896 anvendt nogle Dage til at undersøge dette Forhold nøiere saavel der, som paa nogle andre Punkter i Nordmarken.

Som et for Øiemedet hensigtsmæssigt Apparat benyttede jeg et gammelt Diopterkompas (af Ertel) som *Hansteen* i sin Tid har brugt i Sibirien og paa mange andre Steder. Den henved 10 cm. lange Naal, hvis Vertikalsnit efter Axen er omtrent rektangulært, har paa Midten en Udvidelse med cylindrisk Hul til Indsætning af en Hylse med Agathat, som under Brugen anbringes over en Staalspids i Centrum af Cirkelen. Hylsen kan indskydes saavel fra den ene som fra den anden Side af Naalen; til en fuldstændig Sats hører derfor Observationer i begge de Stillinger af Naalen, som faaes ved at skifte Hylsen. En mulig Excentricitet elimineres ved Aflæsning af Naalens begge Ender, der er skarpslebne og vandrer tæt indenfor den i enkelte Grader inddelte Limbus, som er hævet nogle Millimeter over Cirkelens Bundflade. Da Aflæsningen imidlertid ikke kan udføres nøiere end paa 0°.1, kan heller ikke Misvisningen bestemmes nøiere ved en enkelt Observation.

Diopterets to Opstandere, som ved Foden har horizontale Axer til Nedlægning naar Instrumentet ikke bruges, har en Afstand af vel 20 cm. Den korte Opstander har en 3.5 cm. lang vertikal Spalte, hvis nedre Del er dækket af et Solglas; man kan saaledes efter Behag stille ind paa Solen, eller paa et terrestrisk Objekt eller en lav Stjerne. Traaden, som udspændes i Aabningen af den høie Opstander, er vel 12 cm. lang. Den største Høide, hvori Solen kan indstilles direkte med Diopteret, er altsaa den Vinkel, hvis Tangens er $^{12}/_{20} = 0{,}6$ eller ca. 30°.

Cirkelen og Naalen er indesluttet i en 14 mm. høi cirkelrund Daase, oventil dækket af et Glaslaag, som er fæstet ved en tynd Messingring. Denne kan med Lethed udtages og Laaget hæves, naar Naalen skal udtages til Skiftning af Agathylsen. Hele Apparatet hviler paa sin Bundflade, som er meget nær plan.

Under Observationer af Solen er det naturligvis af Vigtighed at Diopterplanet er vertikalt. Jeg spændte derfor Traaden ind saaledes, at den befinder sig i Spaltens Vertikalplan, naar en tvers over Daasens øvre Rand anbragt Libelle spiller ind. Dette gjordes ved at ophænge en Lodtraad paa den høie Opstander, mellem Dioptertraaden og Cirkelens Centrum, og derved sørge for, at Dioptertraaden blev parallel med Lodtraaden. Jeg overbeviste mig ved samme Leilighed om, at den Heldning, som Dioptertraaden paa denne Maade kunde faa, ikke kan overstige 3′; naar nemlig Dioptertraaden coinciderer med Lodtraaden i den øvre Ende, saa vilde en Heldning af 3′, eller 1 paa 1140, frembringe en Afvigelse af 0.1 mm. i den nedre Ende, og en saadan Afvigelse vilde Øiet kunne mærke. Naar Solen pointeres med et skjevt Diopter, saa vil, som man let kan overbevise sig om, Feilen i det beregnede Azimut være lig Heldningen multipliceret med Tangens af Solens Høide; da nu denne, som før bemærket, ikke kan overstige 0.6 ved direkte Sigtning, saa kan Feilen i Azimut ikke overstige 1.′8, en Størrelse som ikke kommer i Betragtning ved dette Apparat.

En Feilkilde af større Betydning er Naalens Træghed. Skjønt Friktionen mellem en Staalspids og en Agathat er høist ubetydelig, er dog ogsaa, naar Naalen nærmer sig til Meridianen, den magnetiske Direktionskraft saa liden, at Modstanden bliver mærkbar. Erfaring viser ogsaa, at naar Naalen gjentagne Gange bringes i Svingninger, saa stanser den ikke altid paa samme Punkt. Afvigelsen kan i enkelte Tilfælde gaa op til en hel Grad, hvad der muligens vil kunne forminskes noget ved omhyggelig Slibning af Staalspidsen. Da disse Afvigelser imidlertid har Karakteren af tilfældige Feil, idet de tydeligvis beror paa, om Naalens sidste Bevægelse gaar til den ene eller anden Kant, saa maa deres Virkning saavidt mulig elimineres ved Gjentagelse af Observationerne. Efter hver Indstilling af Diopteret paa Solen aflæstes derfor Naalens begge Ender flere Gange (i Regelen tre) saaledes at Naalen bragtes i Svingninger mellem hver Gang. Dette gjordes ved at bringe en anden Magnetnaal i Nærheden, hvorved sørgedes for, at den første Svingning begge Gange gik til modsat Kant, hvad der i nogen

Grad ogsaa forøger Chancen for, at det samme kan blive Tilfældet med den sidste Svingning. I hver Halvsats toges gjerne 3 eller 4 Indstillinger af Solen, hvorved en fuldstændig Bestemmelse af Misvisningen kommer til at bero paa 18 eller 24 Aflæsninger af Cirkelen ved Naalens begge Ender.

Da det ved Vertikaltraadens Indsætning i Diopteret ikke godt lod sig gjøre at bringe Diopterplanet til at falde nøiagtig sammen med den Diameter, der gaar gjennem Cirkelens Nulpunkt, opstaar derved hvad man kan kalde en Indexfeil, som bestemtes særskilt i hver Halvsats ved at stille Diopteret ind paa Naalen og derefter aflæse Cirkelen som ved Observationerne af Solen. Dette kunde ske ved at sigte den omvendte Vei, d. e. anbringe Øiet i passende Afstand bag Traaden istedetfor bag Spalten.

Hver enkelt Observation udføres da paa den Maade, at Dioptertraaden bringes til at halvere Solskiven — hvad der med blotte Øine antagelig kan ske uden større Feil end ca. 1′ — idet Øiet holdes saaledes, at Solen viser sig midt i Spalten, hvorefter Uhrtiden noteres og Cirkelen aflæses som ovenfor nævnt. At foretage Tidsbestemmelser paa Stedet havde jeg ikke Midler til; men da Uhret, et Lommekronometer af Kessels, blev sammenlignet paa Observatoriet umiddelbart før og efter Reisen, som kun varede i 5 Dage, og derved viste sig at have havt en gjennemsnitlig daglig Acceleration af $5^s,94$, kan den derefter beregnede Stand ved hver Observation antages sikker, ialfald paa et Par Sekunder nær, hvad der ikke spiller nogen Rolle ved Observationer med blotte Øine.

Instrumentet bør naturligvis helst opstilles paa et passende jernfrit Stativ; jeg kunde imidlertid ved denne Leilighed ikke føre mere med mig, end hvad jeg kunde bære i Randselen i det ofte ulændte Terræn, nemlig Apparatet selv, en Libelle og nogle Kiler til Nivellering. Jeg bestemte mig derfor til at anbringe Apparatet paa en Træstub eller en passende stor og flad Sten; der findes nok af begge Dele i Nordmarken. Nivellering ved Hjelp af tre passende Kiler, anbragt under en Træplade, hvorpaa igjen Apparatets Bundplade hviler, foregaar næsten lige saa let og sikkert som ved Fodskruer; den eneste Forskjel er, at da Dreiningen om en vertikal Axe bestaar i en Glidning paa Træpladen (i dette Tilfælde Laaget af den til Apparatet hørende Æske), som naturligvis ikke er fuldkommen plan, saa maa Stillingen af og til kontrolleres ved Paasætning af Libellen.

Efter at have udført nogle Observationsrækker i Observatoriets Have, til Sammenligning med Unifilaret i det magnetiske Observatorium, der aflæstes enten midt i Rækken eller umiddelbart før og efter, gik jeg en Dag i Juli Maaned op i Nordmarken, tog samme Eftermiddag en Observation paa *Bjørnholt* ved den sydlige Ende af Bjørnsøen, roede derpaa over Vandet og gik op paa *Kikud*, som ligger lige nordenfor. Da Solen var begyndt at gaa lidt lavt, gik jeg over paa den vestlige Side af Fjeldets øvre Flade, hvor jeg satte Kompasset op paa en Træstub. Efterat den første Halvsats var færdig, holdt Solen sig saa længe skjult bag en Sky, at den efter Fremkomsten begyndte at gaa bag nogle Trætoppe; jeg flyttede derfor bort til en anden Træstub, omtrent 10 Skridt derfra, men noget længere nede i Bakken, og fuldførte Observationen der.

Efter at have taget en Observation paa *Bonna* næste Morgen beregnede jeg et Par Observationer fra hver Station, hvorved det viste sig, at Bjørnholt og Bonna havde omtrent samme Misvisning som Christiania, nemlig resp. 13° og 11°; derimod var der en betydelig Afvigelse for Kikud, og navnlig var det paafaldende, at de to Træstubber, hvorpaa de to Halvsatser var fordelt, gav Værdier med en Differens af 6°. Da disse Observationer maatte udføres under vanskelige Omstændigheder, vakte dette Mistanke om Feil i Aflæsningen af Cirkelen, som isaafald maatte have gjentaget sig flere Gange; jeg bestemte mig derfor til at blive over paa Bonna og gaa op igjen om Eftermiddagen. I Mellemtiden gik jeg bort til *Fyllingen* og tog en Observation der ved Middagstid; Solen stod da for høit til at kunne pointeres med Diopteret, men et fuldkommen brugbart Resultat kunde opnaaes ved at benytte den Skygge, som Dioptertraaden kaster paa Cirkelen; hertil kræves kun, at man en Gang for alle undersøger, hvorledes Skyggen falder i Forhold til Cirkelens Nul-Diameter, naar Diopteret er indstillet til Bissektion af Solen. Om Bundpladen, hvorpaa Skyggen falder, er nøiagtig horizontal eller ikke, kommer herved ikke i Betragtning, saalænge kun Dioptertraaden staar i Solens Vertikalplan. Ogsaa senere benyttedes den samme Fremgangsmaade paa enkelte Punkter, som passeredes underveis paa en Tid, da Solen stod for høit til Indstilling gjennem Diopterspalten. At dømme efter den indbyrdes Overensstemmelse af de enkelte Observationer kan ogsaa for disses Vedkommende Resultatet i Almindelighed ansees rigtigt paa nærmeste Tiendedel Grad; den noget forøgede Virkning af en mulig Heldning af Traaden har ikke stort at sige med de Høider, som Solen kan opnaa paa vore Bredder.

Da jeg om Eftermiddagen atter gik op paa Kikud, tog jeg fuldstændige Satser paa fire forskjellige Punkter, nemlig No. 1 ved den østlige Rand af Fjeldets øvre Flade, 2 omtrent midt paa Ryggen (nær Varden), 3 og 4 de to Træstubber fra den foregaaende Dag. Den efter Hjemkomsten udførte Beregning gav derved fuld Bekræftelse paa det besynderlige Forhold ved disse.

At den magnetiske Deklination paa mange Steder er underkastet stærke lokale Anomalier, er en gammel Erfaring, og det er ikke altid, man kan paavise nogen Aarsag dertil; saaledes har man i Slettelande som Rusland fundet betydelige Differenser paa et forholdsvis indskrænket Terræn. En Forandring af 6° paa ti Skridt synes dog at antyde Tilstedeværelsen af en magnetisk Erts i ringe Dybde, hvorfor jeg har henledet Grundeierens Opmærksomhed paa Forholdet. Fjeldet, som for Størstedelen er bevoxet med tæt Granskov (kun den øvre, mod Syd heldende Flade er mere sparsomt bevoxet) viser paa flere Steder blottede Styrtninger; ogsaa mellem de to Træstubber var der en lav vertikal Bergvæg eller Bænk. Bergarten er næsten overalt i denne Del af Nordmarken Syenit; længere Vest kommer Porfyrfeltet, som strækker sig henimod Ringerike.

Efter at have tilbragt endnu en Nat paa Bonna gik jeg den følgende Dag opover til *Haklovandet,* hvor jeg tog en Observation paa Stranden i Nærheden af den saakaldte Skydsskafferodde, fortsatte derefter nordover og vestover til *Sandungen,* hvor en Observation toges over Middag, og gik saa op paa *Kirkeberget* nordenfor Sandungen. Ogsaa dette er næsten helt skovbevoxet; paa den høieste Top stikker der op to smaa Syenitknauser, en paa den østlige og en paa den vestlige Side, adskilt ved en liden Sænkning med Myr af ca. 50 Skridts Bredde. Paa Østsiden styrter den bevoxede Fjeldside meget brat ned til en betydelig Dybde, paa Vestsiden er den noget mindre brat; mod Nord og Syd skraaner Fjeldet langsommere. Efter Erfaringerne fra Kikud tog jeg ogsaa her en Observation paa hver Top. Fra Kirkeberget gik jeg ned til Katnosa, hvor Natten tilbragtes.

Næste Morgen tog jeg først en Observation ved *Katnosa*, satte derefter over Vandet, gik over til det vestlige Vasdrag med Søerne Hauken og Svarten og fortsatte derfra op paa *Opkuven*, Nordmarkens høiste Punkt. Her fik jeg ingen Sol, men benyttede istedet Taarnet paa Tryvandshøiden som Objekt. Da Opkuven er et trigonometrisk Punkt af første Orden og Tryvandshøidens Taarn uden Tvil er nøiagtig aflagt paa Rektangelkartet, faaes Retningen fuldkommen nøie bestemt.

Efter at have overnattet paa *Langlia* tog jeg den følgende Morgen en Observation der og gik saa hjem, idet jeg underveis observerede ved *Slagteren* og *Frønsvolden*.

Senere har jeg anvendt en Dag til at bestemme Misvisningen paa *Holmenkollen*, *Voxenkollen*, *Tryvandshøiden* og *Frognersæteren*. Paa disse lettere tilgjængelige Punkter kunde et Stativ medføres.

Det hele er kun at betragte som en foreløbig Rekognoscering, dels fordi der til en fuldstændig Undersøgelse naturligvis ogsaa vilde kræves Bestemmelse af de to andre jordmagnetiske Elementer, Inklination og Horrizontal-Intensitet, dels ogsaa af følgende Grund.

Ifølge velvillig Meddelelse fra fhv. Statsminister *Løvenskiold* har Nordmarkens Bestyrer, Forstkandidat *Stalsberg*, allerede for flere Aar siden bemærket, at Kompasset er ganske uefterretteligt i Trakten om Fyllingen. Han har engang forsøgt at opgaa en Delelinie mellem hans eget og det vestlige Skovdistrikt ved Hjelp af en stor Boussole med Kikkert, men fandt den ganske ubrugelig. Et Sted i Sydvest for Fyllingen saa han, ved at sætte et Lommekompas ned paa Fjeldet, Naalen at vende helt om. Dette tilskriver han magnetiske Egenskaber ved selve Bergarten. Han har ogsaa, efter et Par Besøg paa den af mig anviste

Del af Kikud, paavist at Bergarten der (en Augitsyenit) paa flere Punkter er stærkt magnetisk. Hvorvidt dette indeholder den hele Forklaring er imidlertid et andet Spørgsmaal. Han har velvillig overladt mig et Stykke, som var afhugget af den ovenfor nævnte Bænk mellem de to Stubber; ved at bringe et bestemt Punkt af denne Sten i 5 mm. Afstand fra Naalen (den mindst mulige Afstand, naar Glaslaaget staar paa) kunde jeg holde Naalen 17° ude af sin Stilling, men allerede paa 6—7 cm. Afstand var Virkningen umærkelig. Ca. 30 Meter længer i Nord er en anden lignende Bergvæg, af hvilken han har hugget et Par Stykker; ved det ene af disse kunde Virkningen paa den af mig benyttede Naal spores allerede i 20 cm. Afstand. Rimeligvis er de indsprængte Korn af Magnetjern hist og her ordnede i en Række, som tilsammen virker som en forholdsvis lang Magnet, thi saalænge der kun forekommer isolerede Korn, taber Virkningen sig meget hurtig. Det er jo ogsaa tænkeligt, at saadanne Rækker kan være fortsat saa langt ind gjennem Bergmassen, at Virkningen kan strække sig paa endnu længere Afstande, men i ethvert Fald synes Forholdene her at fortjene en nærmere Undersøgelse.

Imidlertid er det saa — hvad jeg maa bekjende, at jeg ikke vidste, da jeg udførte Observationerne — at saagodtsom al den Syenit, hvoraf Nordmarkens Fjeldgrund bestaar, indeholder indsprængte Korn af Magnetjern. Som Følge deraf er der en Mulighed for, at de Observationer, hvor Apparatet var anbragt med et ringe Mellemlag (2—4 cm.) paa selve Stenen, kan have været paavirket af denne. Ved Imødekommenhed af Professor *Brøgger* har jeg paa Mineralkabinettet faaet Adgang til at prøve en Række Haandstykker, dels fra Omegnen af Grorud, Grefsen, Sognsvandet og Maridalsvandet, dels fra forskjellige Kanter i det egentlige

Nordmarken. De allerfleste Stykker var forskjellige Syeniter, nogle faa Porfyr. Af 42 Stykker var der 20, som i 5 Millimeters Afstand fra Naalen var uden Virkning paa denne (deriblandt et fra selve Toppen af Kikud); af de øvrige var der 8, som paa et bestemt Punkt kunde holde Naalen 2°—3° ude af sin Stilling, for Resten af Stykkerne var Virkningen 1° eller mindre.

For disse Observationers Vedkommende skal jeg derfor kun ganske i Forbigaaende nævne, at Misvisningen paa de fleste Stationer fandtes omtrent som i Christiania, nemlig mellem 11°.0 (Opkuven) og 13°.3 (Bjørnholt), deriblandt Kikud No. 1 og 2, samt Bonna og Fyllingen, som ligger ved Foden af Fjeldet; paa Katnosa og Langlia omtrent 8°, og endelig paa Kirkeberget 6°.8 paa den vestlige Top, 4°.8 paa den østlige. Men at der for alle disse Punkter maa gjøres en stærkere Reservation, end de ovennævnte Prøver paa Mineralkabinettet kunde synes at nødvendiggjøre, fremgaar deraf, at jeg ved en senere udført Observation paa Frønsvolden, hvorved Apparatet var opstillet paa et Stativ, fandt en 5°.5 mindre Værdi end da det var anbragt paa en Sten lige i Nærheden.

Resultaterne af de øvrige Observationer er anført i nedenstaaende Tabel, med Tilføielse af Stedernes geografiske Beliggenhed og Høide over Havet, samt det gjennemsnitlige Klokkeslet i mellemeuropæisk Tid, regnet fra Middag til Middag; det kan omgjøres til hvert Steds Middeltid ved at formindskes med $17^m\ 6^s$ + Stedets vestlige Længde fra Christiania. Observationerne blev altid beregnet særskilt for hvert noteret Klokkeslet, og Middeltallet taget for hver Stilling af Naalen, hvorefter disse to Værdier atter forenedes til et Middeltal, uanseet om der var lige mange Observationer (d. e. Indstillinger af Solen) i hver Halvsats, eller 1 mere i den ene end i den anden; det sidste var

Tilfældet der, hvor Antallet af Observationer er anført som et ulige Tal.

Blandt disse Stationer er ogsaa medtaget Punkterne 3 og 4 paa Kikud, uagtet Apparatets Afstand fra Fjeldgrunden under Træstubberne ikke var saa stor, som naar det er opstillet paa et Stativ; om det er selve Fjeldgrunden, som har bevirket de stærke Anomalier, maa foreløbig staa derhen.

Naar Misvisningen for det meste er anført med 2 Decimaler, saa er det hovedsagelig, fordi Differenserne mellem de i Christiania udførte Observationer og de nogenlunde samtidige Aflæsninger af Unifilaret i det magnetiske Observatorium kun har varieret mellem 0°.43 og 0°.48, hvad der tyder paa, at Usikkerheden, ialfald ved disse Bestemmelser, har været mindre end 0°.1. At der overhovedet viser sig en Differens mellem disse to Punkter, hvis indbyrdes Afstand er 150 Meter, kan ikke lægges Instrumentet til Last, da Erfaring ogsaa tidligere har vist, at man faar lidt forskjellige Værdier paa forskjellige Punkter inden Observatoriets Enemærker. Naar Forskjellen i dette Tilfælde gaar op til næsten en halv Grad, saa maa det dog bemærkes, at der foreligger en særlig Grund til en Lokalafvigelse paa det Punkt, hvor Observationerne udførtes; dette befinder sig nemlig i Nærheden af det meteorologiske Instituts Station, et Sprinkelhus paa Stolper, som er fæstet ved 5 Jernbarduner, der som sædvanlig for Jernstænger i denne Stilling er magnetiske med en Nordpol i den nedre og en Sydpol i den øvre Ende, af hvilke den nærmeste Nordpol var 5.5 Meter østenfor Kompasset under Observationerne.

Observationerne er anført i kronologisk Orden. Nogen Reduktion for den daglige Periode er ikke anbragt. Mærket * betegner, at Observationerne kun blev udført i den ene Stilling af Naalen.

Station.	Bredde.	Længde. Vest. Chr.	Høide over Havet. Meter.	1896.	Norm. Tid.	Ant. Obs.	Vestl. Dekl.	Anm.
Christiania	59° 54′.7	0° 0′.0	25	Juli 11	$6^h 41^m$	13	12°.35	Unif. 11°.91, Diff. 0°.44.
„	—	—	—	13	5 45	12	12.34	— 11.86, — 0.48.
„	—	—	—	14	19 44	8	12.13	— 11 70, — 0.43.
Kikud 3	60 5.0	0 4.5	600	16	8 8	2	22.25	*
„ 4	60 5.0	0 4.5	600	—	8 46	2	16.30	*
„ 3	—	—	—	17	7 6	6	22 33	
„ 4	—	—	—	—	7 47	4	16.44	
Sandungen	60 7.2	0 6.1	400	18	1 35	7	10.97	
Christiania	59 54.7	0 0.0	25	25	6 14	8	12.32	Unif. 11°.88, Diff. 0°.44.
Holmenkollen	59 57.8	0 3.4	320	Aug. 26	0 28	4	11.2	
Voxenkollen	59 58.3	0 3.8	450	—	2 17	8	10.33	
Tryvandshøiden	59 59.2	0 3.0	520	—	4 1	9	11.86	
Frognersæteren	59 58.6	0 2.4	420	—	6 0	4	10.63	
Frønsvolden	59 59.3	0 1.6	440	Sept. 19	3 22	6	10.57	

Til nærmere Betegnelse af Stationernes Beliggenhed anføres følgende:

Christiania. En i Observatoriets Have staaende Marmorstøtte, som betegner det trigonometriske Punkt Christiania. Apparatet blev her nivelleret paa samme Maade som ved Observationerne i Marken.

Kikud 3 og 4. De to før omtalte Træstubber paa den vestlige Skraaning af Fjeldets øvre Flade, nær høieste Punkt, ved Begyndelsen af Sænkningen mod den strax vestenfor liggende skovbevoxede Fjeldtop Porthøiden, der har omtrent samme Høide som Kikud.

Sandungen. En Stabel af tilhugget Tømmer i Nærheden af Husene.

Holmenkollen. Omtrent 30 Meter vestenfor Udsigtstaarnet

Voxenkollen. Den efter Veianlægget endnu gjenstaaende Del af den bare Kolle paa Fjeldets vestre Side.

Tryvandshøiden. Omtrent 47 Meter søndenfor Taarnet.

Frognersæteren. Terrassen udenfor det øverste af de vestlige Huse (Restaurationshus). Nogle Bænke med Jernfødder stod nogle Skridt fra, men ingen anden Plads kunde benyttes, da Solen nærmede sig Trætoppene.

Frønsvolden. I Bakken lidt nedenfor Skistuen.

Naar jeg offentliggjør disse for en Del ufuldkomne Observationer, saa er det hovedsagelig for at henlede Opmærsomheden paa de stærke Anomalier paa Vestsiden af Kikud. Om det nemlig skulde vise sig, at det er selve Fjeldgrunden som, uden at indeslutte egentlige Ertsleier, er den direkte Aarsag til disse stærke Afvigelser, saa vilde heraf følge, at man ved en magnetisk Undersøgelse kan være udsat for pludselig at befinde sig i et Terræn, hvor Bergarten ved sin ydre Habitus ikke giver Anledning til nogen Mistanke, men ikke destomindre øver magnetisk Virkning paa Afstande, hvor man efter forudgaaende Prøver med Haandstykker, taget lige i Nærheden, maatte føle sig fuldt betrygget — hvad der tydeligvis vilde berede Vanskeligheder for en detaljeret Undersøgelse af de jordmagnetiske Forhold i et Bjergland som vort.

I Forbindelse hermed meddeles en grafisk Fremstilling af Resultaterne af en Række magnetiske Observationer, som blev udført paa Christiania Observatorium i Anledning af Solformørkelsen 9 August 1896. Foruden paa selve Formørkelsesdagen blev der paa de fire nærmest foregaaende og den ene nærmest følgende Dag hvert 5te Minut fra Kl. $3^1/_2$ til Kl. 6 om Morgenen taget Observationer af Deklinationen og Horizontal-Intensiteten. Til den første benyttedes et transportabelt Unifilar af Elliott, som opstilledes i Observatoriets vestre Fløi i Nærheden af Aflæsningskikkerten for Bifilaret, hvorved den samme Iagttager kunde besørge begge Dele; Unifilaret blev aflæst paa Minutterne 0, 5, 10 o. s. v., Bifilaret paa Minutterne 2, 7, 12 o. s. v. Til Bestemmelse af et Udgangspunkt paa Unifilarets Skala blev der den første Dag taget samtidige Aflæsninger af det store Unifilar i det magnetiske Observatorium; da man imidlertid ikke kan stole paa Torsionens Uforanderlighed gjennem flere Dage for det lille Instrument, blev denne Sammenligning med det store ogsaa gjentaget den sidste Dag. Heraf fremgik en Forandring af 0.56 Skaladele eller 1'.03 i Udgangspunktet paa Elliotts Skala, relativt til den første Dag; ved Fordeling af dette Beløb paa de mellemliggende Dage proportionalt med Tiden kan der naturligvis opstaa en Usikkerhed af en Brøkdel af et Minut i den absolute Værdi af Deklinationen, men Variationen inden de forskjellige Tidsrum af $2^1/_2$ Time kan ansees som fuldt sikker. At Forandringen skyldtes Torsionen viste sig ved umiddelbart efter sidste Observationsrække at huge den magnetiske Collimator ud og hænge et Lod af samme Vegt ind istedet; dette dreiede sig og kom til Ro ca. 30° fra den magnetiske Meridian i den Retning, som svarer til ovennævnte Forandring; et derefter udført Forsøg gav med den dobbelte Cocontraad 6.0 Skaladeles Dreining af Magneten for 360° Torsion, hvoraf følger, at det nævnte Beløb af 0.56 Dele svarer til henved 34° Torsion, overensstemmende med hvad Loddet viste.

Til Bestemmelse af Horizontal-Intensiteten udførtes med Elliotts Instrument, anbragt paa en Marmorstøtte i Observatoriets Park (ikke det ovennævnte trigonometriske Punkt) to absolute Bestemmelser, 13de og 18de August, hvilke med god Overensstemmelse gav et Udgangspunkt for det store Bifilar; efter Anbringelse af den af Hansteen bestemte Reduktion for Temperaturens Virkning paa det magnetiske Moment fandtes Intensitetens Variation ved Anvendelse af den af Fearnley beregnede Skalaværdi, hvorefter en Del svarer meget nær til en Enhed i 5te Decimal af Horizontalintensiteten, udtrykt i Enhederne C. G. S.

Den hosføiede Planche viser Resultaterne for de sex Dage, nemlig Deklinationen oventil fra $15^h\ 30^m$ til $18^h\ 0^m$, Intensiteten nedentil fra $15^h\ 32^m$ til $18^h\ 2^m$, idet Klokkeslettet er regnet fra Middag; overensstemmende hermed er Formørkelsesdagen betegnet som August 8. Skalaen for de forskjellige Dage er anført afvexlende paa høire og venstre Side; kun for de to sidste Dage kunde den samme Skala

Trykt den 29de April 1897.

anvendes for Horizontal-Intensiteten. Tiden for Solens Opgang er betegnet ved en paa hver Curve anbragt Tverstreg med Mærket ☉; de to tykkere Tverstreger August 8, mærket B og E, betegner Formørkelsens Begyndelse og Ende i Christiania.

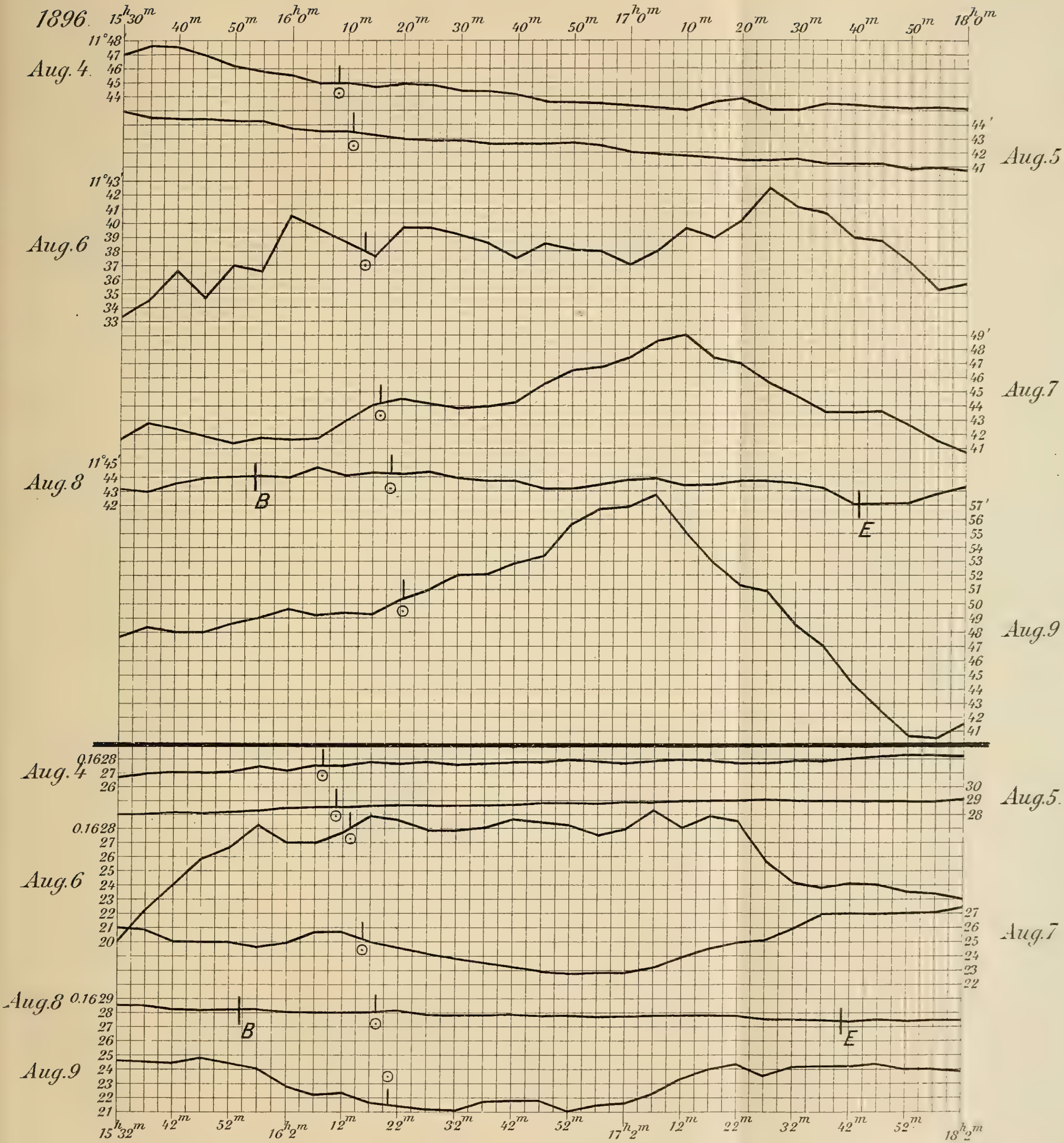
Hvis man vilde indskrænke sig til at sammenligne Forholdene under Formørkelsen med de tilsvarende Curver for de to nærmest foregaaende og den ene efterfølgende Dag, saa udmærker August 8 sig paa en iøinefaldende Maade ved større Ro, idet Deklinationen med ringe Fluktuationer har holdt sig om 11° 44′, medens den de andre Dage varierede meget stærkere, og navnlig den sidste Dag i mindre end en Time aftog fra 11° 57′ til 11° 41′; det samme var Tilfældet med Intensiteten, hvor Curven Aug. 8 er næsten retliniet.

At dette imidlertid ikke kan tilskrives Solformørkelsen, men maa have sin Grund i tilfældige Perturbationer de andre Dage, viser sig, naar man udstrækker Sammenligningen til de to første Dage, hvis Curver for begge Elementer viser den samme Ro. Derimod fremgaar her en anden Forskjel: Medens Deklinationen August 8 har holdt sig nogenlunde konstant, har den August 4 og 5 været langsomt aftagende, og medens Intensiteten under Formørkelsen har været næsten konstant, med en ganske svag Aftagelse, har den de to første Dage været langsomt tiltagende.

Hvorvidt man heri kan spore en Virkning af Formørkelsen, som i dette Tilfælde vel nærmest maatte betragtes som en Forlængelse af Natten, kan nok være tvivlsomt, men har dog nogen Sandsynlighed for sig. Ifølge tidligere kontinuerlige Observationsrækker i Christiania er det gjennemsnitlige Forhold det, at Deklinationen i de tidlige Morgentimer holder sig under smaa Fluktuationer nær sit Minimum (som i den kolde Aarstid dog kun er sekundært, da Hovedminimum indtræffer før Midnat) indtil den omtrent Kl. 8 Formiddag paabegynder en raskere Stigning henimod Dagens Maximum, som naaes Kl. 2 Eftermiddag eller lidt før; i August Maaned er der dog gjennemsnitlig en svag Aftagelse i de her omhandlede Timer, saaledes at de to næsten retliniede men noget heldende Curver August 4 og 5 forsaavidt kan betragtes som fremstillende de normale Forhold. Ogsaa Intensiteten pleier at variere ubetydeligt i denne Del af Døgnet, men opnaar gjerne et sekundært Maximum omtrent ved Solopgang, aftager saa til et Minimum en Times Tid eller to før Middag, hvorefter den stiger til Dagens Hovedmaximum ud paa Eftermiddagen eller Begyndelsen af Aftenen. Den svage, men jevne Tilvæxt i Intensitetet endnu et Par Timer efter Solopgang August 4 og 5 kan derfor ikke betragtes som ganske normal, men Curvens næsten horizontale Forløb paa Formørkelsesdagen giver dog Indtrykket som af et Slags forlænget Solopgang.

Overhovedet er Forbindelsen mellem Aarsag og Virkning her saa kompliceret, at man ikke ved Observationer paa et enkelt Sted kan vente at finde Svar paa Spørgsmaalene. Hensigten med denne Meddelelse er ogsaa kun at levere et Bidrag til Sammenknytning med Resultater fra andre Steder, hvor lignende Observationer maatte være gjort, eller hvor registrerende Apparater benyttes.

Vestlig Declination



Horizontal-Intensitet.

Kart & Litograferingskontoret, Kr.ania.

BIDRAG TIL KUNDSKABEN

OM

NORGES HYDRACHNIDER

AF

SIG. THOR
KONSERVATOR V. UNIV. ZOOL. MUSEUM

MED 2 PLANCHER

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM

Kristiania — Centraltrykkeriet 1897

"Norske hydrachnider."

I.

Første samling.

Sommeren 1896 havde jeg for længere tid siden bestemt at anvende til studiet af norske "**Hydrachnider**". Det akademiske kollegium tildelte mig et reisestipendium for i sommerferien at undersøge disse og beslegtede dyrs forekomst i det centrale Norge og egnene om Trondhjemsfjorden. Jeg havde først tænkt at tage nogle faa mindre vandsamlinger til grundig undersøgelse, men bestemte mig for en anden plan: at undersøge større strækninger mere overfladisk. Derved haabede jeg at faa en første oversigt over vore almindeligste og mest udbredte former.

Hydrachniderne er hidtil ikke undersøgt i Norge, skjønt man i udlandet har beskjæftiget sig meget med dem (ogsaa i Danmark og Sverige), og skjønt de frembyder meget af interesse. De viser en stor rigdom paa farver og former, især sterk variation i mundens, benenes og kjønsorganernes dannelse og en eiendommelig udvikling gjennem et 6-benet larve-, et 8-benet nymfestadium og hvilestadier efter hvert af dem, før de fremtræder som voksne dyr. Hos den med hydrachniderne beslegtede *Trombidium (fuliginosum)* benævner dr. H. Henking i Zeitschr. f. wiss. Zool. 1882 udviklingsstadierne paa følgende maade:

1 a) eg, 1 b) schadonophanstadium, 1 c) larve, 2 a) nymphochrysallis, 2 b) nymphophan, 2 c) nymphe, 3 a) teleiochrysallis, 3 b) teleiophan og 3 c) prosopon = udviklet dyr.

Den faunistiske bearbeidelse frembyder adskillige vanskeligheder, da nymfeformer og unge af teleiophan-hylstret nylig udsmuttede individer i enkelte henseender er ulig de fuldvoksne, saa man kan tage dem for egne arter. Enkelte kræver længere tids dyrkning i akvarier for at kunne bestemmes sikkert; derfor kan denne min korte, foreløbige bearbeidelse af materialet allerede af den grund endnu ikke være afsluttet. Ved nogle arter har jeg derfor maattet sætte spørgsmaalstegn og kun opstillet arten efter en foreløbig bestemmelse, som jeg forbeholder mig senere at præcisere eller korrigere. Hvortil en sammenblanding af voksne og nymfestadier, af han- og hunformer kan føre, har man nok af talende eksempler paa selv fra de dygtigste hydrachnologer (som C. L. Koch, Kramer, Neuman). Saaledes har prof. dr. P. Kramer (i Magdeburg) i 1875 og 1877 opstillet flere arter, der kun er ♂ og ♀ eller nymfer af ganske almindelige arter (især indenfor *Curvipes*, *Piona*, *Hydrochoreutes* og *Hygrobates*). Rektor dr. C. J. Neuman, Sveriges berømte hydrachnolog, har endog opstillet en egen genus **Anurania**, som kun er nymfestadiet af en almindelig genus **Arrenurus**. Jeg har seet færdige *Arrenuri* krybe ud af Anurania-hylstret (en opdagelse, der forlængst er gjort af Krendowskij, Kramer, Koenike, Piersig, Barrois & Moniez?). Mærkeligt er det da, at dr. Neuman efter ca. 12—16 aars studium af disse dyr fremdeles i 1880, ja endog i 1883 holder dem for en egen genus og ikke siden har rettet derpaa. En anden vanskelighed skriver sig fra de nyere hydrachnologers uenighed ved tydningen af de ældres navne (især indenfor *Curvipes* (= *Nesæa)* og *Arrenurus)*. De 2 gamle for sin tid fortrinlige verker af O. F. Müller (1781) og C. L. Koch (1835—42) indeholder tildels forvekslinger og mindre korrekte tegninger. Tegningerne og beskrivelserne mangler en del for bestemmelsen vigtige dele, især kjønsfeltets og epimerernes form. Flere af Müllers og Kochs arter er da forskjellig tydet af senere forskere. Mest bekjendt er eksemplet: *Arrenurus* **tricuspidator.** *Arr. tricuspidator*, Müller, er en anden end *Arr. tricuspidator*, Koch & Bruzelius, denne igjen en anden end *Arr. tricuspidator*, Kramer, denne igjen en anden end *Arr. tricuspidator*, Neuman, denne igjen en anden end *Arr. tricuspidator*, Berlese. Det er vistnok 4 forskjellige arter. Enkelte former selv af dr. Neumans er hidtil ikke gjenkjendte. Det er vanskeligst at gjenkjende arterne, naar tegningerne mangler. For med sikkerhed at henføre norske former til den ene eller den anden af de tvilsomme eller omstridte arter (især indenfor *Curvipes)* kræves større sammenligningsmateriale, end Norge alene kan byde paa, og fremforalt direkte iagttagelse af typiske eksemplarer i nævnte hydrachnologers samlinger.

De fleste arter er imidlertid saa kjendelige, at et éneste blik blot med lupe er tilstrækkeligt. Andre kan let bestemmes ved hjælp af mikroskop — helst i levende tilstand, da farverne gjerne forandrer sig, efterat dyret er dødt. Den ældre opbevaringsmaade — i spiritus — er mindre god, da dyret skrumper sammen, benene trækkes ind, og de fleste farver forandres. Dr. F. Koenike anbefaler blandinger af alkohol og glycerin eller: 1 vol. thymol + 1 vol. 2% iseddike + 2 vol. abs. alkohol + 4 vol. destil. vand.

Den af mig benyttede **literatur** er følgende:

1. **Carl v. Linné:** «Fauna svecica» (1746) og «Systema Naturæ» (1758).
2. **Fr. v. Paula Schrank:** *1) «Beiträge zur Naturgeschichte», Lpz. 1776.[1])
   *2) «Enumeratio Insectorum Austriæ». Augsb. 1781.
3. **Carl de Geer:** *Memoires pour servir à l'Histoire des Insectes Tom. VII. Stockholm 1778.
4. **Otho Friederich Müller:** 1) Zoologiæ danicæ prodromus etc. Hafniæ 1776.
   2) Hydrachnæ, qvas in aqvis Daniæ palustribus detexit, descripsit, pingi et tabulis XI æneis incidi curavit O. F. Müller. Lipziæ 1781.
5. **C. Gottl. Bonz:** *Observatio X i: «Nova Acta Akad. cæs. Leop. Carolinæ». Norimberg 1783.
6. **Joh. Christoffer Fabricius:** Entomologia systematica, II. Hafniæ 1793.
7. **Pierre André Latreille:** Précis des Caractères génériques des Insectes. Paris 1796.
8. **Joh. Friedr. Hermann:** *Mémoire aptérologique. Strassburg 1804.
9. **Th. Say:** *A description of the Insects of North America. Amer. Entomology, Vol. II. 1821.
10. **Carl Vilh. Hahn:** Arachniden treu nach der Natur. abgebildet und beschrieben. I—II. 1831—34.
11. **Antoine Dugès:** 1) Mémoire I sur l'ordre des Acariens,
    2) Mémoire II i «Annales sciences nat. zool.», 2° ser. 1834.
12. **Carl Ludwig Koch:** 1) Deutschlands Crustaceen, Myriapoden und Arachniden (Heft 1—40). Regensburg 1835—41.
    2) Uebersicht des Arachnidensystems. Nürnberg 1837—50.

[1]) De med * betegnede verker kjender jeg kun gjennem referater.

13. **J. Victor Audouin:** *1) Note sur une n. esp. d'Achlysie. «Ann. des Sci. nat.» 1824.
*2) Sur un n. g. d'Arachn. trach.: Achlysia Dytisci, «Bull. Sci. Soc.» Philom. 1827.

14. **Hermann Burmeister:** *Ueber die Achlysia i «Isis» 1834.

15. **Dana & Whelpley:** *On 2 Amer. species of Hydrachna, i «Sillim. Am. Journal of sci.» etc. XXX. 1836.

16. **S. S. Haldeman:** *1) «Zoolog. Contributions» (Hydrachnidæ). Philadelphia 1842.
*2) Description of 2 (spec.) Hydrachnæ. Phil. 1843.
*3) Description of 2 new species of Hydr. etc. Phil. 1843.

17. **Philippi:** Pontarachna punctulum i «Archiv f. Naturgeschichte» I Bd. 1840.

18. **Felix Dujardin:** Mémoire I sur Acariens i «Ann. des Sciences Naturelles». Tom. III. Paris 1845.

19. **Ragnar Magnus Bruzelius:** Beskrifning öfver Hydrachnider, som förekomma inom Skåne. Lund 1854.

20. **Edouard Claparède:** Studien an Acariden in «Zeitschr. für wiss. Zoologie» (Siebold u. Kölliker). XVIII Bd. Leipzig 1868.

21. **C. J. Neuman:** 1) Vestergötlands Hydrachnider 1870.
2) Gotlands och Ölands spindlar och vattenqvalster i «Öfversigt af Kgl. Sv. Vet. Akad. Förh.» 1875.
3) Om Sveriges Hydrachnider, Akad. afhandling 1880, i «Kgl. Sv. Vet.-Akademiens Handlingar». Bd. 17 for 1879.
4) Om Hydrachnider anträffade vid Fredriksdal på Seland 1883 i «Kgl. Vetsk. och Vitt. Samhället». Göteborg 1885.
5) Et kort referat af et foredrag om Limnesia-Eylais-nymfer i svensk «Entomol. Tidsskrift». Stockholm 1880.

22. **P. Kramer:** 1) Beiträge zur Naturgeschichte der Hydrachniden in «Archiv f. Naturgeschichte», 41 Jahrg. 1875.
2) Beiträge z. Natg. der Milben.
3) Familie der Gamasiden.
4) Familie der Bdelliden etc. i «Archiv f. N.», 42 Bd. 1876.
5) Grundzüge zur Systematik der Milben, i «Archiv f. N.», 43 Jahrgang. 1877.
6) Beiträge z. N. der Milben i «Zeitschr. f. die ges. Naturwissensch.» (von Giebel). 3 Folge, III Bd. 1878.

7) Neue Acariden etc. i «Archiv f. N.», 45 Jahrgang. 1879.
8) Ueber Milben,
9) Gamasiden i »Zeitschr. f. die gesammten N.», 47 Jahrg. 1881,
10) Ueber Gamasiden,
11) Segmentirung der Milben i «Archiv f. N.», 48 Jahrg. 1882.
12) Halarachne Halichoeri, Alm. i «Archiv f. N.», 51 Jahrg. 1885.
13) Ueber Milben i «Archiv f. N.», 52 Jahrg. 1886.
14) Ueber das Hydrachnidengenus Anurania i «Zoologischer Anzeiger», 12 Jahrg. 1889.
15) Zur Entwickelungsgesch. etc. der Süsswassermilben «Zool. Anz.». 15 Jahrg. 1892.
16) Ueber die verschied. Typen der 6-füssigen Larven bei den Süsswassermilben, i «Archiv für Natgesch.», 59 Jahrg. 1893.
17) Ueber die Benennung einiger Arrenurus-Arten in «Zool. Anz.», 18 Jahrg. 1895.
18) Die Hydrachniden in Dr. O. Zacharias: «Die Tier- u. Pflanzenwelt des Süsswassers». II Bd. Leipzig 1891.

23. **G. Haller:** 1) Die Hydrachniden der Schweitz in «Mittheilungen der naturf. Gesellschaft in Bern». 1881.
2) Acarinologisches in «Archiv f. Nat.geschichte», 46 Jahrg. 1880.
3) Mundtheile u. systemat. Stellung der Milben in «Archiv f. N.», 48 Jahrg. 1882.
4) Zur Kenntniss der Sinnesborsten der Hydrachniden, in «Archiv f. N.» 48 Jahrg. 1882.

24. **H. Lebert:** 1) Über den Werth u. die Bereitung der Chitinskelette. 1868.
*2) Matériaux etc. Hydr. du Lac Leman i «Bull. de la soc. vaud. des sci. nat.» A. XIII, Lausanne 1874 og 1878.

25. **A. Pagenstecher:** Beiträge zur Anatomie der Milben I og II. Leipzig 1860—61.

26. **A. Croneberg:** Ueber den Bau der Hydrachniden, kort gjengivet i «Zool. Anzeiger» for 1878.

27. **H. Henking:** Beiträge zur Anatomie, Entwickelungsgesch. u. Biologie von Trombidium fuliginosum in «Zeitschrift für wiss. Zoologie (Siebold u. Kölliker)», 37 Bd. 1882.
28. **Willib. Winkler:** Anatomie der Gamasiden in «Arbeiten aus dem Zool. Institute der Univ. Wien u. Zool. Station Triest». Wien 1888.
29. **Robert v. Schaub:** 1) Ueber die Anatomie von Hydrodroma in «Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissenschaften», math. naturwiss. Classe XCVII Bd. Abtheil. I. Wien 1888.
2) Über marine Hydr. nebst. Bemerkungen über Midea Bruz. in «Sitzungsber. k. Ak. Wiss.» etc. XCVIII, I Abtheil. Wien 1889.
30. **A. S. Packard:** *Marine Insects from deep Water i «Sill. Americ. Journal», vol. I. 1871.
31. **Riley:** *I Reg. U. S. Entom. Com. 312. 1878.
32. **Harrington, Fletcher and Tyrrel:** *Report of the entom. branch for 1883 i «Ottawa Fjeldnaturalists Club» 1884. Vol. II.
33. **J. Leidy:** *On the reproduct. and parasites of Anodonta fluv. in «Proceeding etc. nat. sc.» Philadelphia 1883.
34. **L. Koch:** Arachniden aus Sibirien u. Nov. Semlja i «Kgl. Sv. Vet. Akad. Handl.» Stockholm 1880.
35. **Th. Barrois:** 1) Notes hydrachnologiques I i «Revue biol. du Nord de la France». I. Lille 1889.
2) «Matériaux pour servir etc. la Faune des Eaux douces des Açores» I. Lille 1887.
3) Notes hydrachnologiques IV. Sur l'identité de l'Arr. Chavesi Barr. et de l'Arr. emarginator, Müll., «Rev. biol. du N. France». Lille 1893.
36. **Th. Barrois & R. Moniez:** «Catalogue des Hydrachnides, receueillies dans le Nord de la France». Lille 1887.
37. **R. Moniez:** 1) Le Lac de Gérardmer. Ent. et Hydr. i «Feuille des Jeunes Naturalistes». 17 annèe. Paris 1895.
2) Acariens observés en France (1 liste). «Rev. biol. du Nord de la France». Lille 1890.
3) Note sur des Ostracodes, Cladocères et Hydrachnides, observés en Normandie. Lille 1889.

4) Faune des eaux souterrains du departement du Nord et en particulier de la ville de Lille. 1889.

5) Note sur une Hydrachnide marine, Nautarachna asperrimum. Lille 1888.

6) Note sur une Pontarachna (Lacazei, Mon.) de Banyuls-sur-mer. Lille 1890.

7) Note sur l'Arrenurus decurtator, nov. sp. Lille 1892.

8) Pêches de M. Adrien Dollfus en France et La Hollande. Extrait du «Bulletin de la Soc. d'études sci. de Paris» XII. 1889.

38. **O. Zacharias** (F. Koenike): 1) Ergebnisse e. zool. Excursion in das Glatzer-, Iser- und Riesengebirge i «Zeitschrift für wiss. Zool.» 43 Bd. 1886.

2) Zur Kenntniss der Fauna des süssen u. salzigen Sees bei Halle in «Zeitschrift f. wiss. Zool.» 46 Bd. 1889.

39. **O. Stoll:** Hydrachnidæ i «Biologia Centrali-Americana, Zool.» P. 59. 1887.

40. **Krendowskij:** Sydruslands ferskvandsmidder (russisk) i «Travaux de la Soc. des naturalistes à l'univ. Charkow» 1878 & 1884.

41. **A. Berlese:** Acari, Myriopoda et Scorpiones, hucusque in Italia reperta. Fasc. 1—73. Padova 1882—94.

42 **H. Lohmann:** *Die Halacarinen der Planchton-Expedition, refereret i «Archiv f. Nat.geschichte». 59 Bd. 1893.

43. **F. Koenike:** 1) Revision von H. Leberts Hydrachniden des Genfer-Sees in «Zeitschrift für wiss. Zool.» 35 Bd. 1881.

2) Über das Hydrachniden-Genus Atax, Fabr. in «Abhandlungen nat.wiss. Vereins Bremen». VII Bd. 1882.

3) 2 neue Hydr. aus dem Isergebirge in «Zeitschr. f. wiss. Zool.» 43 Bd. 1885.

4) Eine neue Hydr. aus dem Karrasch-See bei Deutsch-Eylau in «Schriften naturf. Ges. Danzig». VII Bd. 1887.

5) Verzeichniss, von im Harz ges. Hydr. i «Abh. natw. Ver. Bremen». VIII Bd. 1883.

6) Einige neubenannte Hydr. i «Abh. natw. Ver. Bremen». IX Bd. 1887.

7) Eine Hydrachnide aus schwach salzhaltigem Wasser i «Abhandl. nat. wiss. Vereins Bremen». X Bd. 1889.

8) Verzeichnis finnländischer Hydrachniden in «Abh. natw. Ver.» Bremen. X Bd. 1889.
9) Ein neues Hydr.-genus (Teutonia) i «Archiv f. Nat.gesch.» 59 Bd. 1890.
10) Zur Entwicklung der Hydr. i «Zool. Anzeiger». 12 Jahrg. 1889.
11) Ein neuer Bivalven Parasit.
12) Eine Wassermilbe als Schneckenschmarotzer.
13) Südamerikan. auf Muschelthieren schmarotzende Atax-species i «Zoolog. Anzeiger.» 13 Jahrgang. 1890.
14) Noch ein südamerikanischer Muschel-Atax.
15) Nomenclatorische Correctur innerhalb der Hydr.-Familie.
16) Seltsame Begattung unter den Hydrachniden.
17) Kurzer Bericht über Nordam. Hydr. in «Zool. Anzeiger«. 14 Jahrg. 1891.
18) Anmerkungen zu Piersig's Beitrag zur Hydrachnidenkunde.
19) Zwei neue Hydrachiden-Gattungen aus dem Rhätikon, i «Zoolog. Anzeiger». 15 Jahrg. 1892.
20) Hydrachnologische Berichtigungen.
21) Noch eine neue Hydrachnide aus dem Rhätikon.
22) Weitere Anmerkungen zu Piersig's Beiträgen zur Hydrachnidenkunde i «Zool. Anz.» 16 Jahrg. 1893.
23) Mitteldeutsche Hydrachniden gesammelt durch Herrn Dr. Made.
24) Zur Hydrachniden-Synonymie i «Zool. Anzeiger», 17 Jahrg. 1894.
25) Über bekannte u. neue Wassermilben i »Zool. Anz.» 18 Jahrg. 1895.
26) Nordamerikan. Hydrachniden.
27) Die Hydrachniden-Fauna von Juist in «Abhdlgn. d. natwiss. Ver.» Bremen. XIII Bd. 1895.
28) Die von Herrn Dr. Stuhlmann in Ostafrika gesammelten Hydrachn. Aus dem «Jahrbuche der Hamb. Wiss. Anstalten» X. Hamburg 1893.
29) Die Hydrachniden Ost-Afrikas i «Thierwelt Ost-Afrikas». IV. Berlin 1895.

30) 2 neue Hydr.-Gattungen nebst 6 unbekannten-Arten, i «Zool. Anz.» 19 Jahrg. 1896.
31) Neue Sperchon-Arten aus der Schweitz i «Revue Suisse de Zool. et Annal. du Musée d'hist. nat. de Genève.» T. III. Genève 1895.
32. *Liste des Hydrachnides, receuillies par le Dr. Th. Barrois en Palestine, Syrie, Egypte. i «Revue biol. du Nord de la France». T. VII. 1896.
33. *Holsteinische Hydrachniden i «Forschungsberichte d. Biol. Station Plön». Theil IV. 1896.

44. **R. Piersig:** 1) Beitrag zur Hydrachnidenkunde.
2) Beiträge zur Kenntnis der im Süsswasser lebenden Milben.
3) Eine neue Hydrachniden-Gattung aus dem sächs. Erzgebirge in «Zool. Anzeiger», 15 Jahrg. 1892.
4) Neues über Wassermilben.
5) Beiträge zur Hydrachnidenkunde i «Zool. Anzeiger», 16 Jahrg. 1893.
6) Über Hydrachniden.
7) Notiz (Hydrachnide).
8) Sachsen's Wassermilben.
9) Hydrachnologische Berichtigungen i «Zool. Anzeiger» 17 Jahrg. 1894.
10) Beiträge zur Systematik u. Entwicklungsgesch. der Süsswassermilben.
11) Einiges über die Hydrachniden-Gattungen Arrenurus u. Thyas,
12) Eine neue Hydrachna-species i «Zool. Anz.» 18 Jg. 1895.
13) Einige neue Hydrachniden-Formen i «Zool. Anzeiger», 19 Jahrg. 1896, No. 515 og 516.
14) *Beiträge zur Kenntniss der in Sachsen einheimischen Hydrachniden-Formen, i «Berichte der Nat.forscher Gesellschaft». Leipz. 1896.
15) Et nyt arbeide: «Deutschlands Hydrachniden» begynder nu at udkomme i Chun & Leuckart: «Zoologica».

45. **A. Protz:** 1) Beiträge zur Hydrachnidenkunde i «Zool. Anz.» No. 493, 19 Jahrg. 1896.

2) Beiträge zur Kenntniss der Wassermilben i «Zool. Anz.» 19 Jahrg. No. 513 og 515. 1896.

3) *Arrenurus rugosus, n. sp. i «Schriften Natf. Ges.» Danzig 1896.

46. **A. D. Michael:** *Study of the internal Anatomy of the Thyas petrophilus, an unrec. Hydr. in Cornwall i «Lond. Proc Zool. Soc.» P. II. 1895.

47. **K. Pízarrovic:** *Zur Kenntniss der Hydrachniden Böhmens i «Sitzber. k. böhm. Ges. Wiss.» Math. Nat.w. Classe XVII. 1896.

De indsjøer, tjern, damme, evjer, elve og bække, som jeg dels ivaar og ihøst dels paa min stipendiereise isommer har undersøgt (mest ved bredderne og overfladisk), er følgende:

Omkring Kristiania, i Østre Aker: Østensjø, Ulsrudvand og Nøklevand (Sarabraaten), damme ved Kastellet og Nordsæter (Nordstrand); nær Ljan: Gjersrudtjern, Stensrudtjern, Kullebundvand, Tussetjern, Gjersjø (Oppegaard), Aarungen og Østensjø (i Aas); i Vestre Aker: Sognsvand og damme paa Bygdø; i Bærum og Asker: Dæhlivand, Engervand, Staavivand, Semsvand, Padderudvand, Bondivand, Gjellumvand og et mindre vand ved Leangen (Opsal).

Ved Horten: Borrevand.

Ved Larvik: Farrisvand og Kleivertjern.

Ved Arendal: Langsævvand, Longomvand, Savenæspollen, Savevand, Solbergvand, Sørsvand, Høgedalstjern og en del andre smaa myrtjern.

Ved Grimstad: Rorevand og Landvikvand.

I Smaalenene: Mosseelv og Vansjø (Raade), elven ved Onsø (tildels brakvand), Ise-sjø og Glengshølen ved

Trykt den 17de Mai 1897.

Sarpsborg, damme i Askim, Øieren (ved Aarnes, Øiene og Fetsund); Glommen (enkelte steder).

Mjøsen (Akersviken og Furnesfjord).

I Gudbrandsdalen: nogle evjer af Gudbrandslaagen (Losna) ved Tretten, Kirkestuen og Tronsnes; ved Lillehammer: Mesnavand, Afskaaken, Skjulsjø, Tyrelielv og bække dér.

I Østerdalen: Sagtjern (Saukjen) og myrtjern ved Elverum, Terninga, bække ved Øxna og Aasta, Glommen og damme ved Nabset; Himesjø og Østersjø (ovenfor Nabset); Præstesjø ved Rena; ved Koppang: Storsjø, Kjemsjø og en mosbevokset bæk mellem dem; ved Tønset: damme og bugter af Glommen; ved Røros: Stikkelsjø og Hittersjø; ved Singsaas: en elv og en bæk; ved Støren: 2 bække paa Øiene, Gulluvand, øvre og nedre Svarttjern.

Omkring Throndhjem: Skjegstadvand, Toskbæk, Brokja; Langvand (ved Bollan) og myrtjern deromkring; Selbusjø; paa Stadsbygden: torvmyr og bække ved Vatngaardsvatn, Hermstadlaugen og en elv ved Hammeren, Aamundvatn, Storvatn og bække dér; i Stjørdalen: bække og evjer af Stjørdalselv; i Skogn og Frosten: Byvatn, Kløfttjern, Sønningen, Hammervatn og en bæk ved Ekne.

Det nordligste af disse steder (Ekne) ligger under **63° 30—40′ n. br.** Saalangt mod nord har jeg konstateret hydrachnider.

Noget almindelig anerkjendt inddelingsprincip for hydrachniderne er endnu ikke leveret; Kochs er for svagt begrundet; Kramers bærer endnu for meget af hypothesen ved sig og synes upraktisk, da størstedelen af slegter (tildels meget forskjellige) henføres til én gruppe. Fordelen ved den mest anvendte inddeling af *Haller* er ikke stor, da han kun udskiller de 2 laveste slegter med nærstaaende øine: **Medio-**

culatæ, men henfører alle de andre til én gruppe: **Latero-culatæ.**

Piersigs nylig (1896) opstillede system kjender jeg kun af referat, men har ikke faaet fat paa selve verket. P. støtter sig delvis til Kramers udviklingshistoriske principer og deler hydrachniderne i 5 underfamilier:

1. **Limnocharinæ** (1 slegt). 2. **Hydrachninæ** (1 slegt). 3. **Eylaïnæ** (1 slegt). 4. **Hydryphantinæ** (3 slegter). 5. **Hygrobatinæ** (21 slegter).

Dette system betegner et fremskridt fra Hallers og Kramers; men selv dette er kun en indledning til hydrachnidernes systematik. Der vil vistnok kræves mange indgaaende studier, især udviklingshistoriske, før dette vanskelige spørgsmaals detaljer kan løses.

Genus I: **Limnochares,** Latr. (1796).

1. *Lim. holosericeus,* Latr. (1796). Almindelig i mudderbund.

Findesteder: Ved Kristiania: Sognsvand, Østensjø (ved Bryn), Kullebundvand, Stensrudtjern, Gjersrudtjern (nær Ljan), Dæhlivand (Bærum), Borrevand (Horten), Mosseelv og Vansjø (ved Moss), Høgedalstjern (ved Arendal); Sagtjern (ved Elverum); Præstesjø (ved Rena); Svarttjern (ved Støren, Thjem.)

Da *Limnochares* mest kryber om paa bunden saa mudderet maa rodes op for at faa den i haaven, har den vistnok ofte undgaaet mig og findes rimeligvis paa langt flere af de undersøgte steder.

Genus II: **Eylaïs,** Latr. (1796).

1. *Eyl. extendens,* Müller (1796). (Sandsynligvis mindst 2 forskjellige arter, hvad jeg senere vil undersøge).

Denne kosmopolit, der ikke alene er funden i alle de undersøgte lande i Europa, men ifølge Koenike ogsaa paavist for Afrika og Amerika, er ligeledes meget almindelig og talrig i det sydlige Norge.

Nordenfor Dovre lykkedes det mig ikke at finde den; men det tør være tilfældigt eller skrive sig fra beskaffenheden af de undersøgte vand. Saameget tør jeg dog sige, at den der nord ikke var saa almindelig som søndenfjelds.

F.: Østensjø (ved Bryn), Ulsrudvand, Gjersrudtjern, Stensrudtjern, Kullebundvand, Tussetjern (Oppegaard), Østensjø i Aas; Langsævvand, Savevand, Savenæspollen, Høgedalstjern og flere myrtjern omkring Arendal; Farrisvand (Larvik); Borrevand (Horten); Vansjø og Mosseelv; elve ved Ise og Onsø; damme ved Mørkved (Askim); evjer af Øieren og Glommen (ved Fetsund, Øiene, Aarnes); en dam ved Akersviken (Mjøsen). I Østerdalen: Himesjø og en dam paa gaarden Nabset (Aasta) og Præstesjø ved Rena.

Genus III: **Hydryphantes,** Koch (1837), Koen. (1892) = Synonym: *Hydrodroma*, Neum. (1880), v. Schaub (1889), Barr. & Mon. (1887), Berlese o. fl.

---

1. *H. ruber*, De Geer (1778) = Synonym *H. puniceus*, Koch (1837).

F.: Tidlig paa vaaren (april) talrig i Gjersjø nær Oppegaard paa oversvømmede bredder af elven; ellers kun enkelte eksemplarer: Kullebundvand, Mjøsen og myrtjern ved Elverum.

Genus IV: **Diplodontus,** Dugès (1834).

1. *D. despiciens,* Müller (1776) = Synonym: *D. filipes,* Dugès, Bruz. Neum. etc.

Meget almindelig, især i det sydlige Norge.

F.: Dam ved Kastellet (Nordstrand); Kullebundvand, Stensrudtjern, Gjersrudtjern (Ljan); Sognsvand; dam paa Bygdø; vand ved Leangen (Opsal), Staavivand; Kleivertjern (Larvik); Langsævvand, Savevand, Savenæspollen, Høgedalstjern og flere myrtjern ved Arendal; Mosseelv, Vansjø; dam ved Terninga og Sagtjern ved Elverum; dam nær Aasta station; Kjemsjø (ved Koppang) og et myrtjern nær Aamundvand paa Stadsbygden ved Throndhjem.

Genus V: **Hydrachna,** Müller (1776).

1. *H. geographica,* Müll. (1776). Sjelden.

F.: Kleivertjern og Farrisvand ved Larvik. Hovind (Helgeøen) 1 ekspl., opbevaret i universitetsmuseets samlinger; det er fundet i aug. 1878 af B. Esmark.

2. *Hydr. Schneideri,* Koen. (1895). Iflg. Piersig Synonym = ? *H. cruenta,* Müll., Krendowskij, tab. VIII, fig. 22 (1884).

Pandeskjoldets (= rygskjoldets) form er anderledes hos *H. cruenta* paa Krendowskij's tegning end hos *H. Schneideri* paa Koenike's tegning. Hvis Krendowskij's tegning er rigtig, er det vistnok 2 forskjellige arter, ikke samme art, som Piersig mener.

F.: Jeg fandt 1 eksemplar blandt spirituspræparater fra Præstesjø (Rena).

3. *H. globosa,* De Geer (1778), Dugès (1834), Bruz. (1854), Neum. (1880), Krendowskij (1884) = *globulus,* Herm. (1804). Synonym? = *H. cruenta,* Müller (1776).

F.: Blandt spirituspræparater fra Arendal fandt jeg 2 eksemplarer, som imidlertid ikke stemmer rigtig med beskrivelser af *H. globosa* (f. eks. hos Neuman). Især er størrelsen forskjellig. Ifølge Neuman er længden 4—5 mm. Mine eksemplarer er kun 1,9 mm. lange og 1,8 mm. brede. Epimererne kan ikke kaldes smaa. Kroppen er ikke meget høi. Jeg har den formodning, at mine eksemplarer tilhører en anden art. Beskrivelsen hos Neuman er imidlertid ikke saa indgaaende, at jeg finder sikre merker til sammenligning. Navnlig savner jeg beskrivelse og tegning af rygskjoldene, af epimererne og kjønsfeltet. Jeg forbeholder mig nøiere undersøgelse, naar jeg finder flere eksemplarer. Foreløbig foreslaar jeg navnet *H.* **biscutata,** *nov. sp.* (Se fig. 1 og 2). Rygskjoldene = (pandeskjoldene) ligner meget skjoldene hos eksemplarer af *H. globosa,* som Hr. F. Koenike velvillig har vist mig, og tegninger hos Dugès og Krendowskij.

4. *H.* **uniscutata,** *nov. sp.* (se pl. I, fig. 3).

I Mosseelven (fra Vansjø) fandt jeg flere eksemplarer af en større art, som tydelig skiller sig fra *globosa* og fra *biscutata,* tildels ved epimerernes og kjønsfeltets form, ved størrelsen (3 mm. l. og 2,6 mm. br.) men især ved pandeskjoldenes (rygskj.) bygning. **De 2 skjolde er nemlig forenede til 1 ved et bredt tverbaand fortil.** I dette tverbaands bagre kant ligger det 5te øie. De andre 2 øiepar ligger udenfor skjoldet, har saaledes en anden stilling end hos *biscutata,* hvor det ene øie ligger indunder skjoldet (sml. fig. 2 med 3). Skjoldenes form, tror jeg, er et af de letteste merker, hvorefter man hurtig og klart kan skille de fleste arter af *Hydrachna*-slegten. Ogsaa af denne art haaber jeg senere at kunne give, en udførligere beskrivelse.

Genus VI: **Sperchon,** Kramer (1877, 79).

Ikke tidligere paavist for Skandinavien.

---

1. *Sp. sqvamosus,* Kramer (1877). Ny for Skandinavien.

   F.: 3 eksemplarer i en liden bæk paa Øiene nær Støren jernbanestation.

2. *Sp. glandulosus,* Koenike (1886). Ny for Skandinavien.

   F.: I en mosbevokset skovbæk mellem Storsjø og Kjemsjø (Koppang) ca. 400 meter over havet sammen med *Teutonia subalpina nov. sp.* og *Hygrobates spp.*

Genus VII: **Teutonia**, Koen. (1889).

Ikke tidligere paavist for Skandinavien.

1. *T. primaria*, Koen. (1889). Ny for Skandinavien. Fig. 6, 7, 8.

F.: Himesjø 344 m. o. h. (ovenfor Nabset) ved Aasta; Byvatn (Skogn) og Hammervatn (Frosten) ved Throndhjem.

2. *T.* (*= Pseudolimnesia*) **subalpina**, *nov. sp.* (Fig. 4 og 5). Sml. fig. 6, 7, 8 *(T. primaria).*

Ved første øiekast tog jeg den for en *T. primaria*, da ligheden er stor; men ved nærmere eksamination fandt jeg forskjelligheder, som gjør den til egen art. Den har (ligesom *T. primaria*) **Limnesia**-palper, -ben, -form, tildels -farve og -manerer, men skiller sig ud som en egte *Teutonia* ved mangelen af ydre kjønskopper og ved, at den har 1 vorte med lang bust paa 1ste led af de 3 første benpar, tildels forskjellig farve.

Den er 1,3—1,5 mm. lang, 1—1,2 mm. bred. Palper 0,5 l. Benenes længde: 1; 1,05; 1,15; 1,5. Farve paa oversiden mørk rødbrun. Den smale gule ryglinjes 2 grene støder fortil sammen med grene fra den røde pandeflek, som indtager kroppens forende (lidt bag øinene). Kroppens sider og underside blegrøde, smal gul anusflek omgiven af mørke flekker. Epimerer blege. Ben blaagrønne.

Det hovedmerke, hvorved denne art let skilles fra *T. primaria* er kjønsfeltet. Dets beliggenhed er omtrent som hos *primaria;* det begynder mellem 4de epimerpar. Men kjønssprekken begrænses fortil af en meget stor og skarpt fremtrædende tverbue, som smalner sterkt mod enderne; i midten er den tyk.

De paa siderne af kjønssprekken indleddede bevægelige kjønsklapper smalner sterkt forover, har bagtil en sterk chitinkant; de **naar ikke længer frem end 2/3 af kjønssprekken. Dennes forreste trediedel mangler kjønsklapper.** Som følge heraf bliver ogsaa **de 3 par kjønskoppers plads rykket bagover.** Det forreste par staar omtrent ved sprekkens midte. Kjønskopperne sidder (som hos *prim.*) indenfor klapperne, det bagerste par er kortere og rundere end de 2 andre.

4de epimerpar har fra den store pore i den indre kant en bred aabning (hos alle mine eksemplarer), ikke som hos Koenike's *primaria* en smal kanal hos ♀ alene. Det indre hjørne af 3die epimerpar har en liden bagudrettet proces. Palperne er som hos *primaria;* dog har palpetanden paa 2det led lidt anden form, gaar bagtil mere jevnt over i fladen uden skarp vinkel (se fig. 5). 4de fodpar's sidste led har kortere bust end *primaria,* men mangler kløer som denne. En stor vorte (pukkel) med 1 lang bust og 1 kortere ved siden findes paa de 3 første bens 1ste led.

For at undersøge, om *T. subalpina, mihi* skulde kunne være en ung (men voksen) *T. primaria,* holdt jeg den flere uger levende, men saa ikke mindste forandring. Jeg antager derfor sikkert, at det var fuldvoksne eksemplarer, saa meget mere som de lagde eg paa glassets vægge. Eggene fik jeg ikke se udklækkede. Jeg fandt aldrig *T. subalpina* i de samme vand som *T. primaria.*

F.: I mosbevokset fjeldbæk mellem Storsjø og Kjemsjø ved Koppang (sammen med *Sperchon* og *Hygrobates*); ved Throndhjem: Kløfttjern og Sønningen i Skogn — Frosten; ved Lillehammer i Afskaaken (nær Mesna). Samtlige steder tog jeg den kun i faa eksemplarer.

Genus VII: **Limnesia,** Koch (1835).

1. *L. histrionica,* Herm. (1805).

   F.: Langsævvand ved Arendal; et lidet vand ved Leangen i Asker og fl. st.

   Da denne art tildels findes sammen med flg. og ligner den meget, har jeg ikke endnu faaet udskilt alle eksemplarer. Arbeidet hermed kræver længere tid, da det sikreste skjelnemerke er den fremadrettede palpetag (modsat *L. maculatas* bagudbøiede); dette kan kun sees sikkert i mikroskop.

2. *L. maculata,* Müller (1776). En af de almindeligste hydrachnider i Norge.

   F.: Kullebundvand, Gjersrudtjern, Stensrudtjern (ved Ljan); Østensjø i Aas; Østensjø, Ulsrudvand og Nøklevand i Østre Aker; i Vestre Aker: Sognsvand; i Asker og Bærum: Padderudvand, vand ved Leangen, Gjellumvand, Dæhlivand, Staavivand; Mosseelv, Vansjø, elv ved Onsø; Afskaaken ved Lillehammer; Losna i en evje nedenfor Tronsnes (Gudbrandsdal); Sagtjern ved Elverum; Himesjø (nær Nabset) ved Aasta; Præstesjø ved Rena; ved Throndhjem: Skjegstadvand og Langvand (nær Ler), Hammervand, Kløfttjern og Sønningen i Skogn — Frosten.

Af denne art har jeg fundet en mængde nymfer og klækket ud endel larver (1ste stadium). Desuden fandt jeg et par steder (især i Præstesjø) en tilsyneladende varietet, hvor næsten hele rygsiden var gulrød ? var. **flava.** Denne gule farve skriver sig rimeligvis kun fra en eiendommelig udvikling af ekskretionsorganet. Forresten har jeg hyppig fundet misvekst i kjønsfeltet, især 2, 4 eller 5 kjønskopper paa én side, paa den anden de normale 3. Se min bemerkning under *Hygrobates longipalpis.*

3. *L.* **venustula,** Koch (1835) hefte 6,10 = ? Synonym: *L. Koenikei,* Piers. (1894).

Ny for Skandinavien (? Finland).

Mine eksemplarer nærmer sig i form, farvetegning, størrelse, opholdssted etc. saameget til Kochs *L. venustula,* at jeg er tilbøielig til at henføre dem did; i palper og kjønsfeltets form stemmer de fuldstændig med *L. Koenikei* paa Koenikes tegning (Hydrachniden Ost-Afrikas i «IV Band, Die Thierwelt Ost-Afrikas», 1895). Jeg antager derfor, at disse 2 arter er identiske.

F.: Kun i en dam og evjer af Stjørdalselven nær Øren i Stjørdalen ved Throndhjem; her i mængde.

4. *L. marmorata,* Neum. (1870 og 1880).

F.: I Glengshølen (arm af Glommen) ved Sarpsborg og Øieren (ved Aarnes). Af prof. G. O. Sars har jeg faaet 1 eksemplar fra Fet (Øieren).

5. *L. undulata,* Müll. (1781), Koch (1835).

F.: I en dam ved Aas landbrugsskole; i en dam paa Bygdø og ? ved Nordstrand og i Askim.

6 (? 5). *L pardina,* Neum. (1870 og 1880). Muligens en varietet af foreg. Iflg. Koenike = *L. undulata,* Koch.

F.: Staavivand i Bærum; Bondivand og Padderudvand i Asker; dam paa Bygdø og ved Nordstrand. Af prof. G. O. Sars fundet i Øieren (Fet). Enkelte eksemplarer afviger meget fra Neumans (1880) tegninger og opgivne maal, saa jeg har været tilbøielig til at opstille en ny art. Jeg fandt saaledes en overgangsform til *marmorata* med hvide grenede streger, men med *pardina*-palpe, som jeg har tænkt mig passende kunde kaldes *L.* **marmoroides,** *nov. sp.* Imidlertid har jeg ikke levende eksemplarer, som jeg nu kan dyrke. Den tør være en ungdomsform, maa derfor dyrkes i nogen tid, før jeg kan have nogen begrundet mening om, hvorvidt den er varietet, ungdomsform eller egen art.

Genus IX: **Arrenurus,** Dugès (1834).

1. *Arr.* ♂ + ♀ *globator,* Müll. (1776). Almindelig omkring Kristiania.

F.: Vestre Aker: dam paa Borgens løkke og paa Bygdø; Asker: et lidet vand ved Leangen; Østre Aker: Ulsrudvand, en dam ved Lensmandssæter; Kullebundvand og Gjersrudtjern (ved Ljan). Rimeligvis ofte overseet, fordi den er liden og svagt farvet.

2. *Arr.* ♂ + ♀ *caudatus,* De Geer (1778) = Synonym: *buccinator,* Müller (1781).

F.: I et lidet vand ved Leangen (Opsal) i Asker ♂ ♀; dam (evje) ved Stjørdalselven (faa ♂ ♂ og mest ♀ ♀); ? Sognsvand ♀ ♀ og Stadsbygden ♀ ♀. Farven paa eksemplarerne fra Stjørdalen er mørk, ganske anderledes end paa Neumans tegninger («Om Sveriges Hydrachnider», 1880) og ryglinjen hos ♀ har en anden form, fortil paa siderne noget bugtet, bagtil lidt udvidet.

3. *Arr.* ♂ + ♀ *pustulator,* Müller (1776), Neum. (1880).

F.: Sagtjern ved Elverum; Præstesjø ved Rena; Kjemsjø ved Koppang; Afskaaken ved Lillehammer.

4. a. *Arr.* ♂ *forpicatus,* Neum. (1880). Ikke sjelden.

F.: I et lidet vand ved Leangen (Opsal) i Asker ♂; i en dam ved Aas landbrugsskole ♂ + ♀;

Kullebundvand ♂ + ♀; Afskaaken ved Lillehammer ♂; i dammen ved Stjørdalselven mange ♂♂ og 1 ♀.

4. b. *Arr.* ♀ **forpicatus**, (Neum. ♂ 1880). Neuman fandt ikke ♀.

Hverken Haller (1882) eller nogen af de senere, som har fundet *Arr. forpicatus* ♂, omtaler ♀, saavidt jeg har kunnet se, hvorfor jeg maa tro, at de ikke har fundet eller kjendt den. Jeg har fundet enkelte ♀♀, hvad jeg tydelig har kunnet konstatere; jeg saa dem nemlig indgaa kopulation med ♂.

De vigtigste merker er: farve omtrent som ♂, temmelig lys (gulgrøn); i et vand, hvor ♂ var mørkere, var ♀ det ligeledes. Rygliujen elliptisk, hel, smalest bagtil. Palpernes 2det led har den **tykke knol** (gevækst) **med haarkrans** paa ligesom ♂.

5. *Arr.* ♂ + ♀ *Neumani*, Piers. (1895) = Synonym: *Arr. emarginator*, (Koch) Neum., dog er det muligt, at 2 arter skjuler sig under dette navn. Den almindeligste *Arrenurus* i det sydlige Norge.

F.: Ulsrudtjern (Østre Aker); Kullebundvand, Stensrudtjern, Gjersrudtjern (ved Ljan); Sognsvand i Vestre Aker; lidet vand ved Leangen (Asker); Solbergvand og Høgedalstjern ved Arendal; Sagtjern ved Elverum; Præstesjø ved Rena.

6. *Arr.* ♂ *Kjermanni*, Neum. (1880).

F.: Afskaaken ved Lillehammer. Stensrudtjern ved Ljan.

7. a. *Arr.* ♂ *dubius*, Koen. (1885) = Synonym: *Arr. tricuspidator*, Neuman (1880) tab. VIII,2.

F.: Kullebundvand (2 ♂); Staavivand 1 ♂ og Padderudvand (♂♂ + ♀♀).

7. b. *Arr.* ♀ **dubius.** Sammen med ♂♂ fandt jeg i Padderudvand (13/9) flere ♀♀. Jeg fandt den dag ingen anden *Arr.* ♂, hvorfor jeg anser det sandsynligt, at de fundne ♀♀ hører til *dubius* ♂, men forbeholder mig nærmere undersøgelse.

8. *Arr.* ♂ **gilvator,** *nov. species* (Figg. 9 og 21). En ♂ fundet i Østensjø ved Aas — tilhører nærmest *emarginator*-gruppen, men tilhænget kortere end hos *Arr. Neumani*, Piers.

0,73 lang, 0,62 bred; ben: 0,57; 0,6; 0,72; 0,89. Farve lysgul med brune flekker; gulhvid ryglinje; røde øine med mørk flek; lysgrønne ben; grøn *petiolus*. Kroppen middels høi, ryggen temmelig fladtrykt uden pukler eller torne. Ryglinjen fortil smalere, udvider sig sterkt bagover ved midten, er bagtil aaben. Udenfor bugten staar paa hver side et stort stigme. Kort bredt anhang (næsten af kroppens bredde) med afrundede stumpe, opadbøiede hjørner. Anhangets bagre rand (mellem hjørnerne) 2 gange bugtet, i midten lidt forlænget (0,25 l.; hjørnerne 0,1 l.); fra denne forlængelse udgaar **petiolus,** der først er jevnbred og **mod enden sterkt tilspidset** (0,11 l. med basalstykket; den smale del 0,055 l.). Det hyaline anhang bredt, kort, afrundet, i midten udrandet, utydeligt at se.

Genitalaabning aflang, midt mellem 4de epimerpar og bagranden; nær bagenfor genitalaabningen *anus*

Koppepladerne er inderst meget smale, men synlige ovenfra (paa kroppens sider). 4de fodpars 4de led mangler tilhæng.

Petiolus's form minder mest om *Arr. lautus*, Koen. (Nordamer. Hydr. 1895), men andre forhold er fuldstændig forskjellige; cfr. ogsaa *Arr. abbreviator*, Berlese (1888) tab. LI,3.

9. *Arr.* ♂ **errator**, (? *nov. nomen*) = Synonym: *Arr. albator*, Bruzelius (1854).

Jeg tror her temmelig sikkert at have gjenfundet den af prof. Bruzelius tab. III,2 tegnede og side 29—30 beskrevne art. Derimod er dette en anden end den af Müller (pag. XXXIII beskrevne) og tab. II,1 afbildede *Arr. albator*, Müll., paa grund af halens forskjellige form; den er ogsaa forskjellig fra *Arr. albator*, Koch (h. 12,15) = ? *Arr. malleator*, Berlese (LI,4) eller = *Arr. Bruzelii*, Koenike (Abhandl. natwiss. Vereine zu Bremen, IX bd 1885 side 221). Den af Bruzelius beskrevne kan derfor ikke beholde navnet *albator* (Müller eller Koch), som før er optaget. Jeg foreslaar navnet *Arr. errator*. Skulde det ved nærmere eksamination vise sig, at den af mig fundne ikke helt stemmer med Bruzelius's *albator*, foreligger her en ny art. Jeg har ikke kunnet undersøge den nøie nok, da jeg kun fandt 1 eksemplar den 10/6 1896 og 1 den 27/6 1896.

F.: Et lidet vand ved Leangen (Opsal) i Asker.

Desuden har jeg i forskjellige vand og damme fundet *Arrenurus* ♀♀, som jeg ikke med sikkerhed har

Trykt den 18de Mai 1897.

kunnet bestemme, da jeg ikke sammesteds fandt ♂♂. Nogle af dem ligner:

10. ? *Arr.* ♀ *angulator,* Koch (h. 13,6) og Neum. tab. VI,1 (1880) og ? *Arr.* ♀ *maculator* (Müll.) Koch h. 12,18.

F.: Ved Arendal (Longomvand og Solbergvand); ved Ljan; Nøklevand i Østre Aker; i Askim og paa Stadsbygden (ved Trondhjem).

Der findes ganske sikkert mange flere *Arrenurus*-arter her i landet; men jeg har manglet tid til at foretage de nødvendige ekskursioner forat søge dem.

Genus X: **Brachypoda,** Lebert (1879), Koen. (1891) = Synonym: *Axona,* Kram. (1875), Neum. (1880), Krendowskij (1884) = Synonym: *Arrenurus,* Koch (1836), Bruz. (1854).

---

1. *Br. versicolor,* Müll. (1776) = Synonym *Ax. viridis,* Kram. (1875) = *Br. paradoxa,* Lebert (1879).

F.: I Asker: Bondivand, Gjellumvand, Padderudvand; ved Ljan: Kullebundvand, Gjersrudtjern; i Østerdalen: Himesjø ved Nabset; ved Sarpsborg: Glengshølen (Glommen); af Prof. G. O. Sars har jeg faaet eksemplarer fra Øieren (Fet). Denne hydrachnide er let at overse, da den holder sig paa bunden og er liden.

Genus XI: **Frontipoda,** Koen. (1891) = Synonym *Marica,* Koch (1835).

1. *Fr musculus,* Müll. (1776), Neum. (1880) tab. X,4.

F.: Høgedalstjern ved Arendal; Sagtjern ved Elverum; Afskaaken ved Lillehammer.

Ogsaa denne hydrachnide holder sig nær bunden, er derfor let at overse.

Genus XII: **Oxus,** Kramer (1875) = Synonym: *Marica,* Koch. (1837) = *Pseudomarica,* Neum. (1880) tab. V,2. = *Frontipoda* Koen. (1891).

1. *Ox. strigatus,*.Müll. (1776) = Synonym: *M. oblonga,* Koch (1837) Kramer (1875) = *Ps. formosa,* Neum. (1880) = *Ox. ovalis* (Müll.), Krendowskij (1884).

F.: Kullebundvand (nær Ljan) 1 ekspl. og 1 nymfe.

Genus XIII: **Lebertia,** Neum. (1880) = Synonym: *Pachygaster,* Lebert (1879).

1. *Leb. tau-insignita,* Lebert (1879) = Synonym: *L. insignis,* Neum. (1880), ikke = Berleses tegn. XXIX,10.

Da rektor Neuman efter 10 à 15 aars undersøgelse kun har fundet 5 eksemplarer i Sverige, maa den være meget sjelden dér. **I Norge** er den derimod en af de mest udbredte og især gjennem Østerdalen og omkring Throndhjem **den almindeligste hydrachnide.**

Jeg fandt den i mange farvevarieter, muligens flere arter. Iflg. en meddelelse af dr. Koenike skal den være funden ved Hammerfest.

F.: Gjersjø (april i mængde), Østensjø i Aas, Sandvikselven (Bærum); Nitelv (Lillestrøm); Mesnavand, Afskaaken, Tyreli-elv og bække dér, Skjulsjø (ved Lillehammer); dam ved Nabset, Himesjø, Østersjø og Aasta-elv; bæk ved Øxna; Storsjø (Koppang); øvre og nedre Svarttjern og bæk mellem dem; bække paa Singsaas og Støren; Toskbæk ved Skjegstadvand (Ler); Hermstadlaugen, Aamundvatn, Storvatn, Vatngaardsvatn og mange bække, som løber ud i disse vand, elv ved Ramsjø og Botten (Stadsbygden); elv til Byvatn (Skogn); bæk ved Hegre (Stjørdalen); i Gudbrandsdalen ved Tronsnes i en evje af Losna. Af hr. prof. G. O. Sars har jeg faaet den fra Øieren (Fet). Af hr. ferskvandsbiolog Huitfelt-Kaas har jeg faaet 3 eksemplarer, 2 eksemplarer fra 2 sik-maver (1 sik fanget den 26/3 1896 i Renaelv, den anden 9/7 1896 i Reinsjøen) og 1 fra en ørret-mave (ørret fanget 9/8 96 i Sjodalsvand). Dette har stor interesse, da det saavidt mig bekjendt er de første eksemplarer, som er fundne i fiskemaver[1]). Prof. G. Haller siger («Die Hydr.der Schweitz», 1882, side 24): «Nach Beobachtungen Dugès verabscheuen die Wasserskorpione die Larven dieser Milben, nach eigenen Beobachtungen und mündlichen Mittheilungen von F. Forel fressen auch die Fische keine

---

1) Nordamerikaneren Forbes skal have paavist, at fiske spiser hydrachnider.

Hydrachniden.» Hr. Huitfelt-Kaas tror bestemt at have fundet flere hydrachnider end disse 3 i fiskemaver; men jeg har ikke seet flere.

Hallers paastand er herved gjendrevet.

Genus XIV: **Mideopsis,** Neum. (1880).

1. *M. orbicularis,* Müll. (1776) = Synonym: *M. depressa,* Neum. (1880).

F.: Ulsrudvand i Østre Aker; et lidet vand ved Leangen i Asker; ? Mjøsen (Akersviken).

Sandsynligvis ofte overseet, fordi den er liden og lever nær bunden.

Genus XV: **Midea,** Bruzelius (1854).

1. *M. elliptica,* Müll. (1776) = Synonym: *M. orbiculata,* Müll., Bruz., Neum. = Synonym: ♀ *Asperia Lemani, Haller* + ♂ *Nesæa Koenikei,* Haller (1885).

F.: I en liden dam ved Slængbraaten i Askim; Gjersrudtjern ved Ljan; evje af Losna ved Tronsnes (Gudbrandsdal).

Genus XVI: **Hygrobates,** Koch (1837) = Synonym: *? Campognatha,* Lebert (1879).

1. *H. longipalpis,* Herm. (1805) = Synonym: *H. rotundatus,* Koch (1837) h. 10, 15 & 16, Bruz., Neum. = Synonym: *Nesæa dentata,* Krendowskij (1884).
+ *? impressus,* Neum. (1880) ♂.
+ = *Nesæa dentata,* Kramer (1875).

Meget udbredt gjennem næsten alle de af mig undersøgte egne. Jeg fandt den sjeldnere i stillestaaende vand (især nordenfor Dovre), oftest i bække og elve sammen med *Lebertia, Curvipes-spp.* og a., især hvor plantevéksten var tæt. *Hygrobates*-arternes eiendommelige mangel paa egentlige svømmehaar, selv paa 4de benpar kan, synes det mig, forklares af deres opholdssted. De lever ofte i elve, hvor strømmen gaar strid; svømning vilde da ikke kunne hjælpe dem stort. Derimod holder de sig godt fast til blade og andre gjenstande nede i vandet; de findes i størst mængde, hvor der vokser tæt af planter med haarfine blade som *Ranunculus aqvatilis, Myriophyllum* og mose, ogsaa bl. *Potamogeton-, Sparganium spp.* og a. Mellem den tætte skov af de haarfine blade og grene har de let for at holde sig fast; glipper taget en gang imellem, finder de snart et nyt. Jeg har ogsaa fundet dem mellem grønalger og under stene paa bunden.

Paa *H. longipalpis* har jeg gjort iagttagelser, der ikke stemmer med en af den skarpsindige prof.

E. Claparède gjort anvendelse af en bekjendt naturlov. Han siger (i «Studien an Acariden», Zeitschr. f. wiss. Zool. 18 Bd. 1868, pag. 447): «so lange die Anzahl der Saugnäpfe (kjønskopper) nur eine geringe ist, d. h. z. B. nur 4—6 Paar beträgt, dann bleibt dieselbe ganz unveränderlich» etc. *H. longipalpis* har regelmæssig 3 par kjønskopper (ɔ: 3 paa hver kjønsplade). Men jeg har fundet flere eksemplarer, hvor den ene side var normal, den anden havde 2 store kj.kopper og 2 à 3 haarpapiller eller smaa kj.kopper; i Kullebundvand fandt jeg endog et eksemplar med kun 1 stor kjønskop paa den ene side (og 1 par bitte smaa). Lignende variationer har jeg seet endnu hyppigere hos *Limnesia*-arter (hvad især dr. Koenike har omtalt); men hos *L.* er det lettere forklarlig, da der regelmæssig findes flere smaa kj.kopper eller haarpapiller mellem de 3 store.

I farve varierer denne art undertiden meget.

F.: Østensjø i Østre Aker og Østensjø i Aas; Gjersjø, Kullebundvand; Glommen og Øieren ved Øiene og Fet (prof. G. O. Sars); et lidet vand ved Leangen i Asker; Dæhlivand og Staavivand i Bærum; Afskaaken og elv ved Mesna (Lillehammer); Terninga ved Elverum; Aasta-elv; mosbevokset skovbæk mellem Storsjø og Kjemsjø ved Koppang; bæk ved Singsaas; bæk mellem øvre og nedre Svarttjern ved Vold (Støren); Langvand, Skjegstadvand (ved Throndhjem); elv til Hermstadlaugen, elv ved Ramsø (Stadsbygden; elve ved Byvatn (Skogn); bæk nær Hegre i Stjørdalen.

En af de varieteter, der nærmer sig til egen art, er

(?) 2. *H.* **borealis**, *nov. sp.*? (? varietet eller ? ungdomsform) ? = *H. gracilis*, Haller (1882).

Den skiller sig sterkest fra *H. longipalpis* ved palpetanden (paa 2det led). Hos *H. borealis* er denne tand lang, smalere mod spidsen og der ikke besat med fine tagger. Paa hele undersiden af 3die palpeled og paa ydre del af 2det led er besætningen af fine tagger meget tæt. Farven er mere vandklar og gjennemskinnelig end hos *H. longipalpis*. Forresten ligner den meget denne, saa jeg kun under tvivl og med forbehold udskiller den som særskilt art.

F.: Jeg blev forsent opmerksom paa dens afvigelse fra *H. longipalpis*, saa jeg ikke kan angive sikre lokaliteter undtagen for: Stjørsdalselv. Ellers fandtes den i et par vand omkring Throndhjem.

3. *H.* **albinus**, *nov. sp.* (pl. I, fig. 11, pl. II, fig. 12, a, b; 22, a, b).

Denne hydrachnide antog jeg fra første stund for en ny art; men for at være sikker paa, at den ikke kunde være en ungdommelig (skjøndt voksen) form af de kjendte arter, holdt jeg den i flere uger og maaneder under opsigt uden at se væsentlig forandring. Allerede farve og størrelse umuliggjør en identificering med *H. nigromaculatus*, Lebert—Haller. Navnet har jeg valgt med hensyn til dens lyse farve og sterke gjennemskinnelighed.

Form: aflang. Farve: gulhvid, halvt gjennemskinnende med de sedvanlige 5 (smaa) lysebrune rygflekker og hvid rygstreg; ♀'s rygstreg bredere, især de forreste tvergrene. Under lysebrune sideflekker med hvid grenet flek omkring kjønsfeltet.

Størrelse: ♂ 0,85—0,9 mm. l.; 0,75 br.; palper 0,45 mm.; ben: 0,78, 0,82; 1,1; 1,3.

♀ 0,83 mm. l.; 0,7 mm. br.; palp: 0,43; ben 0,7—1,6.

Palperne lange smale; **2det led mangler egentlig tand**; men dets **forrand** (paa undersiden) er **udvidet til en fremstaaende kant**, besat med smaa tagger, der godt kan sees ved 60 ganges forstørrelse; 3die palpeled er ikke stort tyndere end 2det; mere end sidste halvdel er forsynet med lignende vortetagger; herved skiller den sig fra *H. exilis*, Koen. (1895), hos hvem de faa tagger ikke kan sees uden sterk forstørrelse (? 200—300 gange); 4de led meget smalere, med faa haar mod spidsen; 5te led med almindelig kløvet spids. Mandibler tynde, ikke afvigende.

Epimererne har den sedvanlige form, indtager omtrent forreste halvdel af undersiden. 4de epimer viser (foruden den sedvanlige pore fortil ved 3die ep.) ved sterkere forstørrelse 6—10 (alm. 8) ophøininger uden tydelig pore, paa 3die ep. antydninger til lignende. Benene med parvise lange torne (bust) mod enden af hvert led, ellers besat med spredte torne. Kløerne er tynde, kløvede, den indre gren kortest.

Kjønsfeltet ligger langt bag, især hos ♀, der har anus og de 2 stigmer næsten ved kroppens bagkant.

♀'s kjønssprek er fortil begrænset af en kort mørk tverbue, delt ved en tag i midten, bagtil af en tykkere, mere ret tverbue; paa siderne omgives den af de vanlige klapper (= *labia externa),* der er fladere og mere langstrakte, ellers som hos *longipalpis.* Sprekkens længde 0,15—0,16, pladernes bredde tilsammen 0,11. Kjønsfeltets længde 0,17, bredde 0,3. Paa kjønspladerne staar de sedvanlige 3 par kjønskopper, som er store, støder tæt til hinanden og har stor pore (ligesom hos ♂).

♂'s elliptiske, korte gabende kjønssprek er omgivet af 2 buer med parallel kant. Herved kommer koppepladerne længer fra hinanden end hos ♀. ♂'s bagre ben er forholdsvis ikke saa lange som ♀'s.

F.: Ved Koppang i skovbækken mellem Kjemsjø og Storsjø; bækken mellem øvre og nedre Svarttjern (Vold) ved Støren; bæk ved Singsaas; Toskbæk ved Skjegstadvand og Langvand (nær Throndhjem); i Skogn: Byvatn; i Stjørdalen: bæk, dam og evjer af Stjørdalselven; ved Elverum i Glommen.

Var. a. *albo-fasciatus.*

Ryglinjens (ekskretionsorganets) sidegrene har undertiden en saadan størrelse, at de danner et hvidt tverbaand; enkelte gange er hele ryggen hvid lige frem til øinene.

Jeg har i løbet af faa uger seet forandringer fra den normale tegning og desuden fundet flere overgangsformer, hvorfor jeg kun betragter den som en tilfældig varietet, uagtet enkelte eksemplarer viser forskjel i palpernes taggebesætning, kjønsfeltets beliggenhed etc.

F.: I skovbækken ved Kjemsjø (Koppang); Toskbæk, Skjegstadvand ved Thr.hjem; bæk ved Singsaas.

Var. b. *epimerosus (? nov. sp.).*

Epimererne indtager størstedelen af bugsiden, saa kjønsfeltet ligger nær kroppens bagrand. Imidlertid anser jeg disse for unge ikke udvoksede eksemplarer af *H. albinus, mihi.* Det lykkedes mig (paa grund af reise) ikke at holde dem i live længe nok til at se dem forandre sig. Jeg maa derfor lade det spørgsmaal staa til senere besvarelse, om de danner en egen art, varietet eller kun er ganske unge individer.

F.: Nogle faa eksemplarer i Stjørdalselv og dammen dér.

Genus XVII: **Rivobates,** *nov. genus.*
(pl. I, fig. 10; pl. II, fig. 20).

I den oftere nævnte mosbevoksede skovbæk mellem Storsjø og Kjemsjø ved Koppang (Østerdalen) fandt jeg den $^{21}/_{7}$ 1896 sammen med *Sperchon gland.*, *Hygrobates albinus* og *Teutonia subalpina* en ny art, som ligner *Teutonia* lidt i form og farve, men iøvrigt har meget tilfælles med *Hygrobates-spp.* Jeg bestemte den først som en *Hygrobates,* men finder ved nøiere overveielse, at den bør stilles i en egen genus.

Den ligner *Hygrobates* i palper, epimerer og ben (uden egentlige svømmehaar). Palpernes 2det led mangler egentlig tag, har kun opsvulmet fintandet forrand. Epimererne er smaa, 4de er afrundet 4-kantet med ret bagrand. Maxillarorganet, 1ste og 2det epimerpar er sammenvoksede.

Det, som skiller *Rivobates* fra *Hygrobates*, er kjønsfeltet med kjønspladerne og deres kjønskopper. I disse dele nærmer *R.* sig lidt til *Acercus latipes.*

Ikke alene er **kjønskoppernes tal** større end hos nogen hidtil kjendt *Hygrob.*-art. De europæiske arter har sedvanlig kun 3 paa hver side (denne 19—25), en amerikansk 9—12 *(multiporus).* Men **kjønskoppernes form og størrelse er forskjellig** fra alle (ogsaa fra de amerikanske efter dr. Koenikes tegning). *Hygrobates* har normalt store aflangt-ringformige (pæreformige) kjønskopper med en stor pore i midten; — hos *Rivobates* er **kjønskopperne smaa kantede, støder nær til hinanden som celler og mangler den store pore**, men har en mindre.

Koppepladerne ligger hos *Rivobates* (især hos ♀) langt bagover, gaar bagenfor kjønsklapperne og kjønssprekken og omslutter hos ♀ ikke den forreste del af klapperne (som hos *Hygrobates*).

Kjønssprekken og klapperne har forøvrigt lignende form som hos *Hygrobates.* Mellem ♀'s sprikende kjønsklapper kan sees en indre sprek.

1. *R.* **norvegicus**, *nov. sp.* (pl. I, fig. 10; pl. II, fig. 20)

Længde 1,1—1,3 mm., bredde 0,9—1 mm., tykkelse 0,7—0,9 mm. Øinenes afstand 0,4 mm. Farven brungul (rygflekkerne udbredt over næsten hele rygsiden), fortil ved øinene lysere gul; derfra gaar 2 smale gule streger bagover. Ryglinjen smal, hvid, sterkt grenet. Under er farven lysere, især fortil graagul, bagtil brun, kjønsfeltet med en hvid flek, der straaler ud til siderne med flere grene. Epimererne sidder langt fortil og er smaa, især synes 4de par (og de dermed sammenvoksede 3die) at være rykket langt til siderne.

Kjønskoppernes tal er 19—25 paa hver side.

Kjønsfeltets længde 0,26, bredde 0.34; hver koppeplades længde 0,17, bredde 0,12. Kjønssprekkens længde 0,24; den begrændses fortil og bagtil af korte, men skarpe tverbuer. Anus findes omtrent midt imellem kjønsfeltet og den bagre kropsrand.

F.: 1 ♂ og 2 ♀♀ i skovbækken mellem Kjemsjø og Storsjø.

Genus XVIII: **Hydrochoreutes,** Koch (1837).

1. a. *H. ungulatus*, Koch (1835), Neum. (1880).

   F.: Kun i Mjøsen, men dér i mængde i juni maaned paa de oversvømmede bredder af Akersviken (Hamar).

   b. *H. filipes*, Koch (1837), Neum. (1880).

   F.: Kleivertjern og Farrisvand ved Larvik; Akersviken (Mjøsen).

   c. *H. cruciger*, Koch (1837), Neum. (1880).

F.: Mjøsen (Akersviken); Nitelv ved Lillestrøm; Himesjø og Østersjø nær Nabset (Aasta); Kjemsjø ved Koppang; Glenshølen ved Sarpsborg; Gjersjø nær Ljan og Ulsrudvand i Østre Aker (ved Kristiania). Nymfer sammen med de voksne, især i Nitelv. Sammesteds fandt jeg 1 overmaade stort eksemplar: 2,4 mm. l. og 2,1 mm. br., medens den alm. størrelse er 1,4 mm. l. og 1,2 mm. br.

Rektor Neuman i Sverige, prof. Barrois og Moniez i Frankrig har ligesom Koch sat disse Hydr. som 3 arter. Ifølge dr. Piersigs undersøgelser [«Zool. Anzeiger» no. 405 (1892) og no. 466 (1895)] er *H. ungulatus*, Koch = hannen, og *H. cruciger*, Koch + *H. filipes*, Koch samme hun paa 2 forskjellige alderstrin; alle 3 udgjør saaledes kun 1 art. Efter deres udseende synes dette mig ogsaa meget rimeligt; dog er det merkeligt, at jeg kun paa ét sted har fundet ♂ = *H. ungulatus*, men dér i mængde. Rektor Neuman har ogsaa kun fundet den (♂) paa 1 sted i Sverige (meget sjelden). Rektor Neuman meddeler desuden, at han har fundet ♂ baade til *H. cruciger* og til *H. filipes*, men beskriver den ikke nøiere, saa det tør være en feiltagelse.

Genus XIX: **Atractides,** Koch (1837) = Synonym: *Megapus*, Neum. (1880).

1. *Atr. spinipes*, Koch (1837) (? Synonym: *Atr. ovalis*, Koenike).

   F.: Kun 4 eksemplarer i elven ved Aasta station (Østerdalen).

Genus XX: **Piona,** Koch (1842) [oprindelig kaldt: *Nesæa,* Koch (1835)].

---

1. *P. lutescens,* Herm. (1805) = Synonym: *P. flavesens,* Neum. (1880) tab. II, fig. 4.

   F.: Østensjø i Østre Aker; Gjersjø ved Ljan; Himesjø nær Nabset ved Aasta (Østerdalen); Akersviken i Mjøsen.

Genus XXI: **Curvipes,** Koenike (1891) = Synonym: **Nesæa,** Koch (1835), Bruz. (1854), Kramer (1875), Neuman (1880), Haller (1882), Berlese (1885), Barr. & Mon. (1887) o. fl.

---

1. *C. coccineus,* Koch (1836), Berlese, h. I, fig. 8 (1882). Synonym: *Nesæa rosea,* Koch (1837) Neum. (1880) ? Synonym iflg. Koen. = *C. nodatus,* Müll., tab. VIII, 6.

   F.: Ved Heggedalselv nær Gjellumvand; Dæhlivand (Bærum); Mosseelv ved Vansjø (Moss); Akersviken (Mjøsen).

   Jeg anser Berleses tydning (*Acari, Myriop.* etc., *Italiani* 1,8) af Kochs *coccineus* (i «Crust., Myriop. Arachn.» etc., h. 8, fig. 11-12) for den rigtige, medens dr. Koenike holder *C. coccineus,* Koch for en varietet af *C. nodatus,* Müller, (?Koch) og Piersig anser den for = *C. roseus,* Koch (og = *nodatus,* Müll.). Bruzelius og i tilslutning til ham Neuman har taget rent feil og forvekslet den med en anden art. Om denne Bruzelius's og Neumans art har senere Koenike og flere brugt navnet: *C. coccineus,* Bruz. Dette er neppe korrekt, naar man har en anden art, som svarer til Kochs tegning og beskrivelse. Denne er gjengivet i Berleses værk (I,8) og med den stemmer mine eksemplarer. Jeg synes ikke, at den ligner *C. nodatus,* som paa Müllers tegning (tab. VIII, fig. 6) har en ganske anden farve, kropsform og smaa palper, hos Koch en anden farve og størrelse. Beskrivelsen af *C. nodatus* hos Müller (pag. LXXII, no. 39) er holdt i saa almindelige udtryk, at de lige godt kan passe paa andre arter. Enkelte udtryk passer ikke rigtig paa denne f. eks. den fremhævede gjennemsigtighed, og at kroppen er smalere bagtil end fortil. Begge arter (*C. coccineus,* Koch, og *C. Bruzelii, mihi*) findes almindelig i Danmark (Sjælland); dette har hr. dr. Ad. Jensen i Kjøbenhavn velvillig givet mig anledning til at overbevise mig om. Det forekommer mig, at *Hydrachna clavicornis,* Müller, tab. VI,7) ligner *C. coccineus,* K. ligesaameget som *H. nodatus,* Müller (tab. VIII,6),

Det er ikke usandsynligt, at Bruzelius har sammenblandet 2 arter, der ligner hinanden; jeg tror neppe at Koch har gjort det samme. Ved sin tegning har Koch ialfald havt den mindre art for øie; det viser størrelsen (2,5—2 mm. l.) og farvetegningen, som stemmer udmerket. Den af Koch tegnede art bærer efter min mening navnet *coccineus* med rette. Den anden art, som Koch ikke har tegnet, er af

Bruzelius gjengivet noksaa korrekt; enkelte mangler har tegningen, saaledes er 4de epimers bagudrettede proces for liden og vel langt ud til siden.

Russeren Krendowskij har i sit værk over Ruslands hydrachnider leveret en bedre tegning (i «Travaux de la soc. nat. Charkow. 1884) tab. VIII fig. 2. Han kalder den: *Nesæa longipalpis*.

Neuman (1880) har beskrevet den meget godt (under navn af *coccineus*, Koch). Den er ikke identisk med Kochs art og kan dertor ikke kaldes *coccineus*, Koch, som Bruz. og Neum. har gjort; heller ikke kan den kaldes *coccineus*, Bruz., hvilket Koenike har indført. Dette navn kan ikke bestaa ved siden af *C. coccineus*, Koch, der har prioriteten og gjælder den mindre art med de ca. 27 (25—30) kjønskopper. Den store art, tegnet hos Bruz., beskrevet af Neumann, har derimod ca.90—100 kjønskopper (*centiporus*); for den foreslaar jeg navnet:

2. *C.* **Bruzelii**, Sig. Thor = Synonym: *C. coccineus*, Bruz. (1854), Neum. (1880), Koen. (1881) etc. = Synonym: *C. longipalpis*, Krendowskij (1884) tab. VIII, fig 2.

Krendowskij's navn *Nesæa longipalpis* er neppe tilladeligt, da han har en anden art *Nesæa dentata*, Kramer, som er identisk med *Hygrobates longipalpis*, Herman, og denne kommer efter Krendowskij's slegtsinddeling hos ham til at maatte hede *Nesæa* (= *Curvipes*) *longipalpis*, Herm. Derved vilde Krendowskij indenfor sin *Nesæa* faa 2 arter med samme navn *(longipalpis)*. Selv om hans slegtsinddeling er gal, vil kun forvirring opstaa af dette dobbeltnavn. Denne forvirring undgaaes bedst ved det af mig foreslaaede navn *Bruzelii*.

Trykt den 28de Mai 1897.

En af de almindeligste hydrachnider i det sydlige Norge; den findes ogsaa nordover til Thr.hjem. Den er efter min erfaring den rovgjerrigste af alle.

F.: Bondivand, Gjellumvand, Padderudvand, (Asker); Staavivand og Dæhlivand (Bærum); Nøklevand, Ulsrudvand, Østensjø ved Bryn og Østensjø i Aas; Tussetjern, Kullebundvand, Stensrudtjern, Gjersrudtjern (ved Ljan); Langsævvand, Savevand, Savenæspollen ved Arendal; Kleivertjern ved Larvik; Borrevand ved Horten; Mosseelv og Vansjø ved Moss; elven ved Onsø; Nitelv ved Lillestrøm; Afskaaken ved Lillehammer; Sagtjern ved Elverum; Præstesjø ved Rena; Kjemsjø ved Koppang; nær Throndhjem: Skjegstadvand.

3. *C. conglobatus*, Koch (1836) h. 9, f. 7 = Syn.: *C. pulcher*, Neumann (1880) tab. VI, f. 4.

{? Syn.: = *variabilis*, Koch (1836) iflg. Barr. & Mon.
{? Syn.: = *pulcher*, Koch (1836) h. 8, f. 9 & 10 iflg. Neum.

Da dennes navn hos Koch er omstridt, vil jeg fremhæve, at jeg mener den, som Neuman har beskrevet og afbildet; ellers forstaar man vanskelig, hvilken der menes; men navnet *pulcher*, Neum., kan ikke benyttes, fordi Koch har dette navn anvendt paa en (?) anden *Curvipes*.

Det er sandsynligt, at Koenikes forklaring af synonymien her som saa ofte ellers er den rigtige; dog har jeg endnu ikke kunnet overbevise mig om, at *C. luteolus*, Koch, Neum. ogsaa er identisk med *C. conglobatus*, Koch, = *C. pulcher*, Neum. Jeg opforer dem efter Neuman som 2 særskilte arter, indtil jeg ved nærmere undersøgelse faar en sikrere begrundet mening.

F.: Nymfer i en dam paa Bygdø; Tussetjern ved Oppegaard; Langsævvand ved Arendal; Afskaaken ved Lillehammer; Sagtjern ved Elverum; Præstesjø ved Rena; Østersjø og Himesjø ved Nabset.

4. *C. luteolus,* Koch (1836) h. 9, f. 18 & 19, Neum. (1880).
=Synonym: { ♂ *stellaris,* Kramer (1875).
{ ♀ *mollis,* Kramer (1875),
iflg. Koen. = *C. conglobatus,* Koch.

F.: Mjøsen ved Hamar; en evje af Losna nedenfor Tronsnes i Gudbrandsdal; ? Kleivertjern ved Larvik.

5. { *C.* ♂ *variabilis,* Koch (1836) h. 8, f. 7 = ? Synonym: *dubius,* Koch (1844) h. 37, f. 12.
{ *C.* ♀ *decoratus,* Neum. (1880) tab. VIII, f. 1 = Synonym: *rufus* Koch (1835) h. 5, f. 22 =? Synonym: *variabilis,* Koch (1836) h. 8, f. 8.

Kochs navne er temmelig usikre og dobbelte, saa jeg tror Neumans navn: *decoratus* var at foretrække, da hans tegning er udmerket og ikke til at tage feil af; det gjelder kun ♀. Dog anser jeg det rimeligt, at Koenikes tydning her som saa ofte ellers er den rigtige. Ifølge denne er ogsaa *C. dubius,* Koch, Neuman identisk med *C. decoratus,* Neum. og *variabilis,* Koch og *rufus,* Koch. Jeg haaber senere, at faa undersøgt dette nøiere. Indtil videre opfører jeg dem efter Neuman som 2 arter (*variabilis* og *dubius*).

F.: Longomvand ved Arendal; Kleivertjern ved Larvik; Mjøsen (ved Hamar); Østersjø ved Aasta; Ulsrudtjern, Kullebundvand ved Ljan.

6. *C. dubius,* Neum. (1880), Koch (1844) h. 37, f. 12; iflg. Koenike (1894) = Syn.: *variabilis,* Koch, ? Syn.: *rufus,* Koch (1835).

F.: Langsævvand ved Arendal; Sognsvand ved Kristiania; Østensjø i Aas; Svarttjern ved Støren.

7. *C. rotundus,* Kramer (1879). Ny for Skandinavien.

Den minder i enkelte henseender om *N. punctata,* Neum. tab. V,4 og *N. longicornis,* Neum. tab. II,2.

F.; I Øieren paa oversvømmede græsbevoksede bredder: Øiene, Aarnes, Fetsund; i Glengshølen ved Sarpsborg; Præstesjø ved Rena.

Mine eksemplarer afviger fra Kramers beskrivelse og tegning ved størrelsen (Kramers 0,9 l; mine 1,1—1,3 l. og 0,8 br.), ved formen (langstrakte) og ved kjønskoppernes tal (flere end hos Kramers); de nærmer sig noget til *clathratus,* Koenike, 1893 (Stuhlmann tab. III), men afviger ogsaa fra den; muligens maa jeg senere skille den ud som egen art.

8. *C. fuscatus,* Herm. (1805), Koch (1836), Neum. (1880), Haller (1881), Koen., Berlese (1888), tab. LI,6.

Jeg har mine tvivl om, hvorvidt Bruzelius's *Nesæa fuscata,* er den samme, som vi nu kalder *C. fuscatus,* Herm. Størstedelen af beskrivelsen er saa almindelig, at den kan passe paa flere *Curvipes*-arter. Det éneste merke af mere speciel karakter er kjønsfeltet. Her siger Bruzelius: «på sidorna om bakre ändan af dessa skivor (ɔ: kjønsklapperne hos ♀) ligger en **mängd** upphöjda punkter eller knölar (ɔ: kjønskopperne) liknande dem hos *N. coccinea (Bruzelii)*». Men *C. fuscatus* har paa hver side kun ca. 10 kjønskopper, altsaa ikke «en mängd lig *C. Bruzelii*«, der har henved 100; heller ikke ligger de fleste af dem hos ♂ ved bagre ende af spalten, men strækker sig fremover forbi spaltens midte. Det forekommer mig rimeligt, at Bruzelius har haft en anden art for øie ved denne beskrivelse.

Almindelig (mest ♀♀) i flere vand.

F.: Ved Kristiania: dam paa Bygdø; Gjersjø, Kullebundvand ved Ljan; Farrisvand og Kleivertjern ved Larvik; Himesjø ved Nabset (Østerdalen); Præstesjø (Rena); Svarttjern ved Støren (nær Throndhjem); Afskaaken ved Lillehammer; Golaa-vand i Fron (Huitfelt-Kaas).

9. *C.* **niger** ♂ ♀, *nov. sp.* Se pl. II, fig. 13—15, muligens synonym: ? *C. brevipalpis*, ♀, Neum., muligens synonym (?) *C. alpinus*, ♂, Neum.

Denne art nærmer sig noget *C. fuscatus*, i farve udseende, epimerers form og de første larvers udseende, men afviger især i størrelse, palper og kjønsfeltet. Den nærmer sig i flere henseender til *C. brevipalpis*, Neuman (1880) «Om Sveriges Hydr.» pag. 38—39, saa jeg har været i tvivl, om den ikke kunde henføres til den. Desværre mangler fuldstændig tegninger (hos Neuman). *C. niger* skiller sig fra Neum.'s *brevipalpis* i flere henseender; saaledes er (modsat *C. niger*) kroppen hos *brevipalpis* fortil nedtrykt, benene meget kortere end kroppen, generationsfeltet med meget utydelige kjønsklapper; koppepladerne (= stigmefelterne) utydelige, og kjønskopperne = (stigmerne) faa og smaa. Paa grund af disse forskjelligheder har jeg ikke vovet at identificere dem. Det samme gjælder en anden af Neumans arter: *C. alpinus*, Neum. (1880) pag. 44—45. «Kroppen indtrykt i forranden, af ringe høide; 4de benpar kortere end 1ste og andet; kjønsaabningens bredde **langt større** end dens længde. Farven **hvidgul**; øinene røde og usedvanlig store; lidet livlig i bevægelser.» Jeg har hos dr. Koenike seet præparater af *C. alpinus*, der stemmer bedre med *C. niger;* imidlertid vover jeg endnu ikke at identificere ♂ med Neumans *alpinus*. ♀ nærmer sig mere *C. brevipalpis*. En grund til at øge min betænkelighed ved at identificere *C. niger* med *C. brevipalpis*, Neum. eller *C. alpinus*, Neum. er, at hr. rektor Neuman ikke fandt nogen af disse arter i Danmark, da han i 1883 undersøgte O. F. Müllers gamle samlegebet Fredriksdal (Sjælland), hvor *C. niger* findes flere steder. Denne kundskab skylder jeg ligeledes hr. dr. Ad. Jensens velvillige udlaan af arter. Da jeg saa hr. rektor Neumans beskrivelse af en ny art *C. pellucidus* derfra, faldt det mig ind som en mulighed, at denne kunde være identisk med min *C. niger*. Imidlertid er der flere merker, som ikke stemmer. Desværre har ikke hr. Neuman leveret tegning — hverken af kjønsfelt eller palper hos sin *C. pellucidus* —, saa det er vanskeligt at have nogen sikker forestilling derom. Dersom ♀'s generationsfelt (hvad Neuman antyder) er ganske ligt gen. feltet hos *C. punctata* ♀, Neum. (tab. V,4), er identificering umulig. Men da blir det mig i høi grad gaadefuldt, at hr. rektor Neuman ikke i Danmark har fundet nogen art svarende til min *C. niger*, da denne ikke er sjelden dér.

Jeg har fundet en del individer af meget mork farve, mørkebrune uden lysere rygstreg, kun med rødt foran øinene. Den sedvanlige farve er rødbrun eller graabrun; ♂ har større rød flek ved øinene og paa siderne, undertiden sterkt rødgul ryglinje. Form: aflang, bredest bagover.

♀ (fig. 13). Størrelse: 2—2,4 mm. l.; 1,4 br.; 1,2 høi; palper 0,5 l.; ben: 1,9; 1.9; 2; 2,1.

Palperne (fig. 15) er korte og tynde især 4de led langt og smalt med en svag konveks hvælving paa midten af bøiesiden, her med 2—3 haar, ellers uden tydelige tænder (kun svage rudimenter). 5te led ender med en 3-kløvet stump spids. Alle ben har svømmehaar. 3dje og 4de epimerer paa hver side er sammenvoksede; venstre og høire sides epimerer (♀) skilte ved et middelsbredt mellemrum. 4de epimer har lang, smal tilspidset processus.

Kjønsfeltet begynder lige bag 4de epimerers indre hjørner, har fortil en stor tverbue og bag sprekken en mindre.

Paa sprekkens sider er de sedvanlige halvmaaneformige kjønsklapper. Ved kjønsklappernes bagre ende ud til siden ligger (hos ♀) de afrundet-rombeformige kjønsplader; de indre og ydre hjørner er længst fra hinanden, diagonalen mellem forreste og bagerste hjørne kortest. Paa hver plade er 16—21 kjønskopper, de fleste nær randen, nogle i midten; 1 à 2 er gjerne lidt større. Omtrent i sprekkens længde bag dens bagre chitinbue ligger anus med 2 par stigmer paa siderne. Ret ud for kjønspladerne (udenfor 4de epimers processus) findes et par stigmer og 1 par i epimerernes bugt. 1 stort stigme findes mellem 2det og 3dje par epimerer. —

♂ (fig. 14) 1,4 mm. lang; 1 mm. bred. Farve: noget sterkere rødgul pandeflek og sideflek og tydeligere ryglinje. Under lidt mere graaagtig; ellers omtrent som ♀. De 2 forreste benpar har meget store klør, hvis skede er dyb og lang, over $\frac{1}{3}$ af sidste internodie. Den vigtigste forskjel fra ♀ bestaar som vanlig i 3dje benpars forkortning og endeled, 4de benpars udskjæring (paa 4de internodie), epimerernes og kjønsfeltets form.

3die og 4de epimerer paa 1 side er meget sammenvoksede; delingen mellem dem gaar kun halvt ind. Høire og venstre sides epimerer (3 og 4) naar ikke helt sammen, men skilles ved et smalt mellemrum. Ved 4de epimer hænger kjønsfeltet sammen, idet der fra 4de ep.'s indre hjørne udgaar bagud og til siden en smal forlængelse, der omslutter kjønsaabningen og hænger sammen med den næsten cirkelrunde kjønsplade; denne er kun ved en smal aabning skilt fra den smale spids af 4de epimers proces. Paa hver kjønsplade er 12—18 kjønskopper grupperede i ring om 1 lidt større. Kjønsaabningen (med genitaltasken) er middels stor, hesteskoformig, fortil halvcirkelformig, bagtil næsten ret afskaaret (uden de udbugtninger, som findes hos flere arter f. eks. den beslegtede *C. fuscatus*, Herm., *C. uncatus*, Koen., *C. roseus*, Neum. (Koch) o. fl.

Foruden ♂♂ og de langt talrigere ♀♀ tog jeg i Svarttjern (ved Støren) en del nymfer, som sandsynligvis tilhører denne art; men da *C. fuscatus*, Herm. forekom sammesteds, tør det ogsaa være muligt, at nymferne tilhører denne; de ligner nymfer, jeg tidligere har fundet af denne art.

Derimod var jeg saa heldig at faa larver (i 1ste stadium), som jeg med sikkerhed kan henføre til *C. niger*. Jeg tog nemlig en 10—12 store egsvangre ♀♀ af *C. niger* og isolerede dem i 2 mindre glas; dagen efter (den 28/7 1896) havde de lagt en del eg, og i de følgende 2—3 dage fortsatte de dermed. Imidlertid blev ikke eghobene saa store, som jeg har seet opgivet for nærbeslegtede arter. Der var hobe med 3, 4, 5, 6, 7 eller 8 eg i hver, hyppigst 5 eller 7. Jeg fulgte deres udvikling, saavidt som mine reiser tillod. Udviklingen stemte i hovedtrækkene merkværdig godt med den af prof. E. Claparède i «Studien an Acariden» 1868 paa en *Atax-sp.* studerede. 7 dage gamle var de langt udviklede, med stor brun mave indbugtet foran og bagtil, 2 par øine, anlæg til ben etc. Den 10de august, altsaa efter 14 dages forløb, var 1 udsmuttet, andre holdt paa at krybe ud; andre blev ikke færdige før 8—14 dage senere (formodentlig senere lagte eg). De udklækkede larver levede 8—14 dage, nogle indtil 3—4 uger, men døde da formodentlig af mangel paa passende næring eller insekter at hefte sig til. Jeg kunde nemlig ikke føre med mig store akvarier.

Merkeligt var det, at jeg paa det næste sted fandt ♂♂ langt talrigere end ♀♀ og disse mindre (1,25 mm. l., 0,93 mm. br.), formodentlig ganske unge. ♂♂ med 14—15 kjønskopper, 11 i ringens periferi. Det var i et ubetydeligt tjern i en sphagnummyr ved Sønningen i Skogn. Her fandtes denne art alene, men i stor mængde. — Nogle eksemplarer fra en dam paa Bygdø, samlede af prof. G. O. Sars, og eksemplarer fra vand omkring Arendal synes at høre til samme art; men da disse er opbevarede paa spiritus, er farven ganske tabt. Arten synes at være meget udbredt i Norge, især talrig i enkelte vand med mængder af smaakrebs, hvoraf de tildels lever. Selv angribes de og fortæres bl. a. af større eller ligestore hydrachnider, f. eks. *Curvipes Bruzelii* og *Limnesia maculata*.

F.: I mængde i enkelte grunde vand, tjern og sagteflydende elve. Øvre og nedre Svarttjern (Vold) ved Støren; sphagnumtjern ved Sønningen i Skogn; myrtjern og vand ved Arendal; bæk ved Kleivertjern (Larvik); en dam paa Bygdø ved Kristiania (prof. G. O. Sars); et lidet vand ved Leangen i Asker (♂♂), o. fl. st.

10. *C. alpinus*, Neum (1880).

F.: I en evje af Losna (Gudbrandslaagen) ved Stav nær Tretten.

11. *C.* **Stjørdalensis**, *nov. sp.* ♂ + ♀ (pl. I, fig. 16—17).

Ligner tildels *C. alpinus*, Neum. og *C. spectabilis*, Neum. (1880), men skiller sig fra dem dels ved størrelse, dels ved palper etc.

♀ (fig. 16) 1—1,4 mm. l., 1 mm. br. Palper 0,7 l. Ben 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; øinenes afstand 0,44 mm. Kropsform: elliptisk, bredest bagover og bagtil med svage hjørner.

Farve: Eg-gul med lysegul rygstreg og sedvanlige brune flekker; under samme farve med mørke flekker især bagtil; anusflek lysgul; ben gulgrønne. *Labium* 0,26 lang, 0,23 br. Epimerfeltets længde til processens spids 0,7 mm.; 4de epimerpars bredde 0,9. Mellemrummet mellem 4de epimerpar 0,16 mm.; mellem 1ste par 0,12 mm. Kjønsfeltets længde (fra forreste tverbue til koppepladernes bagre rand) 0,37; bredde (koppepladernes ydre kanter) 0,44. Kjønssprekkens længde 0,25; kjønsklappernes bredde (tilsammen) 0,17. Anus ligger 0,15 mm. bag kjønssprekkens bagre tverbue.

Ved kjønsklappernes bagre ende ligger de næsten runde (lidt i firkant uddragne) koppeplader, som støder til kjønsklapperne lidt bagenfor midten. Hver af dem bærer ca. 20 (18—24) kjønskopper, 1 lidt større i midten, de fleste andre samlede i ring nær pladernes rand. Fortil begrænses Kjønssprekken af 2 forenede kraftige tverbuer, bagtil af en kort streg. Paa siderne af koppepladerne staar 2 par stigmer, bagenfor anus 1 par.

4de-epimererne er middels store, sammenvoksede med 3die og bagtil forsynede med en bred, men kort og stump processus. Benene har de sedvanlige svømmehaar, ikke talrige.

Palperne er kraftige, meget tykkere end 1ste benpar. 4de palpeled har 3 middelsstore tænder, 1 i spidsen og 2 bagenfor, ikke ved siden af hinanden (hos ♂ mindre tænder).

♂ (fig. 17) ligner meget ♀ i farve, størrelse (1,2 l., 0,9—1 bred, palp. 0,6 mm. l.), benenes længde undtagen 3die par, som har vanlig sterk forkortning. De to bagerste epimerpar fra høire og venstre side støder næsten helt sammen i midtlinien, især bagerst ved kjønsaabningen, der begynder lige i epimerernes bagrand, er omtrent lige bred som lang med en udbugtning bagtil og til siderne, saa den blir næsten korsformig. Den omgives for størstedelen af de runde store kjønsplader, som hver bærer ca. 22 kjønskopper. Kjønspladerne berører næsten 4de epimers brede retvinklede processus. Da epimererne er større end hos ♀, rykker kjønsfelt og anus længer tilbage.

F.: I en evje af Stjørdalselven (mellem Hell og Hegre) i Stjørdalen nær Throndhjem.

12 *C.* **alatus**, *nov. sp.* ♂ + ? ♀. (Pl. II, fig. 18—19).

Denne art nærmer sig *C. Neumani*, Koen., men skiller sig tydelig i flere henseender.

♂ (fig. 18) har 4de epimerer fra høire og venstre side tydelig adskilte. Kjønsaabning med kjønstaske liden, smal, elliptisk, tilspidset, paa begge sider omgivet af lidt bagudrettede vingeformige felter (koppeplader), som synes adskilte fra 4de epimer.

Vingefelterne er besatte med (hver) 30—40 kjønskopper, tættest langs kanterne, aabnere i midten, hvor 2 meget større end de andre ogsaa findes.

Palpernes 2det og 3die led er lidt tykkere end 1ste benpar; 4de led har 3 tænder, 1 mindre i spidsen og 2 større ved siden af hinanden.

Udskjæringen i 4de led paa 4de benpar er liden.

Farven meget lys gul med mørkbrune rygflekker og gul rygstreg.

♂ 0,9 mm. l. og 0,8 mm. br. (et andet ekspl. 1,1 l., 0,9 br.); ben 1,25; 1,25; 1,3; 1,44.

En ♀, som jeg fandt paa et ganske andet sted, ligner saa meget denne, at jeg føler mig sterkt fristet til at regne den til samme art, uden at jeg dog har fuldgyldigt bevis herfor.

♀ (fig. 19) 0,75 mm. l., 0,6 br.; ben 0,56—0,8. Farve: lidt mere gjennemskinnelig end ♂ og vandklare ben.

Korte tykke palper, med 2 smaa tænder og en chitintag ved spidsen af 4de led.

Kjønssprekken er omgivet af de vanlige halvmaaneformige klapper, fra hvis sider udgaar smale vingeformige koppeplader med 21—28 kjønskopper paa hver.

F.: ♂♂ 17/7 Himesjø nær Aasta (Østerdalen) og 1 ekspl. fundet i Sognsvand af prof. G. O. Sars.

1 ♀ 21/7 i Langvand (ovenfor Bollan) nær Ler ved Throndhjem.

13. *C.* ? *Neumani*, Koen. (1881) (?) *var. Bygdøensis.* ? *nov. sp.* Denne ♂ har kun 14 kjønskopper paa hver side, medens *Koenikes* har ca. 30. Det er derfor sandsynligt, at her er en ny art. Men da jeg kun har faaet 1 eksemplar udklækket af nymfe, har jeg villet skaane eksemplaret og derfor ikke kunnet undersøge det nøie nok. Jeg opsætter derfor beskrivelsen til senere, idet jeg har det haab til næste aar sammesteds at kunne fange flere.

F.: En nymfe i en dam paa Bygdø ved Kristiania.

Genus XXII: **Neumania,** Lebert (1879) = Synonym: *Atax, Fabr.* = Synonym: *Cochleophorus,* Piersig (1894).

Iflg. dr. Koenikes mening er ikke Piersigs slegtsnavn *Cochleophorus* holdbart, da ialfald Leberts ældre slegtsnavn har prioritet.

---

1. *Neum. spinipes,* Müller (1776) Synonym: *Atax coeruleus,* Kram., Krendowskij + *Atax loricatus,* Kram. + *N. nigra,* Lebert + *N. alba,* Lebert.

   F.: (?) Præstesjø ved Rena; et vand ved Leangen (Opsal) i Asker.

2. *Neum. vernalis,* Müller (1776), Neum. (1880). (Iflg. Piersig ♀ = Synonym: *N. despiciens* Neum.). + ? *Neum. mirabilis* Neum. (1880), regnes af Neum. til *Nesæa* (= *Curvipes*).

   Disse 2 hører rimeligvis sammen som ♂ og ♀ eller som varieteter eller forskjellige alderstrin af samme art.

   Jeg har kun leilighedsvis fundet enkelte eksemplarer, som jeg ikke har havt leilighed til at dyrke og studere længe nok, hvorfor jeg foreløbig henfører dem hid.

   F.: Bondivand i Asker; Østensjø ved Bryn; Stensrudtjern og Gjersrudtjern ved Ljan; Sagtjern ved Elverum; (?) Afskaaken ved Mesna nær Lillehammer; (?) hul i en Torvmyr ved Vatngaardsvatn paa Stadsbygden og (?) dam ved Stjørdalselv nær Throndhjem.

I den oftere nævnte merkelige evje ved elven i Stjørdalen (nær Throndhjem) og Afskaaken (Lillehammer) fandt jeg i stort antal en form, som skiller sig saameget fra Kochs og Neumans tegninger af *At. vernalis*, især i farven, at jeg ikke tør regne den hid. Enten maa Neumans tegning af *At. vernalis*, være daarlig, eller udgjør mine eksemplarer en ny art. Den opstilles foreløbig som ny art; jeg foreslaar navnet:

3. ? *Neum.* **ciliata** ? *nov. sp.* 1,4—1,5 mm. l.; 1,1—1,3 mm. br.

Farve: grøngul med sorte flekker; den sorte midtflek fortil ikke rund som hos *vernalis* (iflg. Koch, Neuman) men firkantet, i bagkanten udrandet. Rygstreg sterkt rødgul, tyk. Epimererne graa; grønne eller brune ben og palper; under med sorte flekker især bagtil. I kanterne gjennemskinnende. Palperne er meget smaa, omtrent som paa Neum.'s tegning af *mirabilis*. 4de epimerpar har bagtil den samme tag (korte processus), som findes hos *At. crassipes* og fl., men som mangler hos *At. vernalis* og *Neum. mirabilis* efter Neum.'s tegning.

Kjønsfeltets form omtr. som hos *N. mirabilis* men ligger lidt længere frem. Dog har kjønspladerne kun 16—18 smaa kjønskopper. Benene er mere forsynede med torne (bust) end paa Neum.'s tegning, og bustene er længere og mere sagtakkede. Men især udmerker benene sig ved, at næstsidste led ogsaa paa de 2 første par har 1—2 lange tynde haar, der er næsten saa lange som sidste fodled og ligger tæt ind til dette. Der findes ikke antydning hertil paa Neumans tegning. Dog føler jeg mig ikke sikker paa, at det er en egen art. Det tør være, at den kun er varietet af *Neum. vernalis*, Müll.

F.: Evje af Stjørdalselven (nær Throndhjem), Afskaaken (Lillehammer) o. fl. st.

Genus XXIII: **Atax,** (Fabr. 1805), Bruz. (1854).

---

1. *At. crassipes*, Müller (1776). Almindelig.

F.: Ulsrudvand i Østre Aker; Østensjø i Aas; Kullebundvand, Gjersjø (Oppegaard), Sognsvand i Vestre Aker; Farrisvand og Kleivertjern ved Larvik; Savenæspollen og Langsævvand ved Arendal; Vansjø ved Moss; Sagtjern ved Elverum; Præstesjø ved Rena (Østerdalen).

Sammen med de voksne fandtes af og til nymfer, især talrige paa høstkanten f. eks. i Østensjø (Aas).

Antallet af de iaar fundne og undersøgte norske hydrachnider beløber sig til **58 arter**, fordelte paa **23 slegter**; af disse er ca. 16 nye for Skandinavien og 9 nye for videnskaben; en ny slegt er opstillet. Rigtignok er **enkelte** bestemmelser kun foreløbige og tvivlsomme, ligesom det tør være muligt at et par arter (af *Curvipes* og *Limnesia*) bør slaaes sammen til én; men til gjengjæld tør det hænde. at enkelte varieteter maa udskilles som egne arter. Selv efter en reduktion vil derfor antallet af de i sommer fundne norske arter neppe gaa under 50. Ved sammenligning med andre landes (særlig Sveriges) fauna ser det herefter ud, som om Norge skulde være et hydrachniderigt land, hvad man paa forhaand ikke skulde vente. Saaledes indeholder:

dr. Hallers Schweitzerfauna 1882: 32 arter hydrachnider.
dr. Koenikes Hydrachniden im Harz 1883: 28 arter.
dr. Mades Middeldeutsche Hydrachniden 1894: 38 arter.
Prof. Berleses Italienske hydrachnider 1882—92: 24 arter.
Prof. Barr & Moniez Nordfrankrigs hydrachnider 1887: 72 arter.
Dr. Krendowskij Sydruslands hydrachnider 1884: 35 arter.
Dr. Piersig Sachsens hydrachnider 1894: 77 arter.
Prof. R. M. Bruzelius Skaanes hydrachnider 1854: 19 arter.
Rektor C. J. Neumann Sveriges hydrachnider 1880: ca. 66 arter, (fraregnet 3 *Limnesia* -nymfer, 2 uholdbare *Anurania*-arter og 2 uholdbare *Hydrochoreutes*-arter).

Sammenligner jeg særlig med de svenske hydrachnidefaunaer, viser sig følgende overraskende forhold: Prof. dr. Bruzelius fandt (til 1854) i Skaane (Sydsverige) kun (18 à) **19 arter.** Rektor dr. Neuman leverede **efter flere aars undersøgelser** i Upsala og Vestergøtland **(1870)** et (efter hans eget udsagn) «nogenlunde fuldstændigt billede af Vestergøtlands hydrachnidefauna» (16 nye) med Bruzelius's tils. **35 arter. Efter endnu 5 aar** til leverer han: «Gotlands og Ølands Hydrachnoidæ», **28 arter** (ca. 10 nye), hvorved tallet vokser for Sverige til ca. **45 arter.** Endelig leverer han **4—5 aar efter** i sin akademiske afhandling: «Om Sveriges Hydrachnider» flere nye arter og en fuldstændig oversigt. Medregnes 1 i 1883 ny, udgjør antallet nu i det hele for Sverige: 73 ÷ 7 = **66 arter.** (Iflg. dr. Piersigs udsagn bør antallet af Neumans sikre arter reduceres langt mere). Efter 1 sommers (ca. 4—5 maaneders) flygtige undersøgelse i Norge har jeg allerede paavist over 50 arter (deraf ca. 40 i Kristianias nærmeste omegn). I 3 af disse 5 maaneder har jeg været saa optaget med andet arbeide, at jeg i 1 maaned kun fik gjort 5 smaa ekskursioner, i en anden

Trykt den 2den Juni 1897.

kun 3. Hele arbeidet indskrænker sig derfor hovedsagelig til de 2 sommermaaneder (juli — august) og lidt i mai. Naar jeg i denne korte tid har kunnet paavise flere arter i nogle egne af Norge, end prof. Bruzelius og rektor Neuman i flere aar (til 1875) i Sverige, og rektor Neuman med bistand af flere efter endnu flere aars arbeide (til 1883) altsaa i det hele ca. 15 aars undersøgelse kun har fundet henved 70, saa tror jeg med vished at kunne antage, at **Norge er forholdsvis rigere paa hydrachnider** end Sverige. Thi jeg nærer ikke Tvil om, at rektor Neumans undersøgelse er overmaade grundig, ligesom hans verk er udarbeidet med stor nøiagtighed og omhu og hans billeder er fortrinlige. Og jeg er ligesaa overbevist om, at der ved fortsatte undersøgelser i Norge, kan findes mange flere, saa antallet vil gaa langt over 70 arter. Især venter jeg, at der vil findes adskillige af slegterne *Curvipes* og *Arrenurus*. Den sidstnævnte har jeg næsten ikke faaet tid til at efterforske; men fundet af nogle (for mig ukjendte) ♀♀ har tydet paa, at her maa være flere nye arter.

Jeg har i Norge fundet alle de af rektor Neuman for Sverige paaviste slegter — undtagen *Bradybates*, Neuman (? = *Thyas*,*) Koch), som nok med tiden vil findes. Jeg har fundet 3 slegter og ca. 16 arter, som ikke er kjendte i Sverige.

Af slegter, fundne i udlandet, har jeg endnu ikke kunnet paavise: *Acercus*, Koch; *Pionacercus*, Piersig; *Wettina*, Piers.; *Aturus*, Kramer; *Pontarachna*, Philippi; *Nautarachna*, R. Moniez; *Feltria*, Koenike; *Zschokkea*, Koen.; *Eupatra*, Koen. (1896); *Panisus*, Koenike (1896); *Thyas*, Koch*) og nogle sjeldnere (amerikanske og afrikanske) slegter.

*) Under trykningen opdagede jeg, at der blandt mine spiritus-præparater fandtes exemplarer af en ny *Thyas*, Koch, som jeg havde overseet.

Jeg har hidtil ikke havt mindste tid til at undersøge salt- eller brakvand, heller ikke høitliggende fjeldvand, heller ikke Vestlandet, Nordland eller Finmarken. De høiestliggende vand, som jeg flygtig besøgte, laa ca. 700 m. o. havet (omkring Røros og Tønset); men her fandt jeg ikke hydrachnider.

De høiestliggende vand og elve, hvor jeg isommer fandt hydrachnider (i stor mængde) laa ca. 300—400 m. o. havet (i Østerdalen). De sydligste vand, jeg undersøgte, laa ca. 58° 20′ n. br. (ved Arendal), de nordligste ca. 63° 30′—40′ n. br. (Skogn ved Throndhjem). Jeg syntes at merke en betydelig forskjel i faunaen for de sydligste og nordligste af disse egne. Imidlertid behøves større materiale for at kunne eftervise dette med sikkerhed og se, hvad der skyldes tilfældige omstændigheder, jordbundens beskaffenhed, plantevekst, aarstid etc. Jeg vil kun nævne, at *Lebertia* og *Hygrobates*-arter findes i stor mængde nordover (gjennem Østerdalen og omkring Throndhjem). Dette synes at stemme med et af dr. G. Haller («Hydr. Schweitz», 1882) meddelt faktum at *Hygrobates (longipalpis)* en af de arter, der gaar høiest tilfjelds i Schweitz (ca. 2000–2300 m. o. h.); *Lebertia (= Pachygaster)* er talrig paavist for Schweitz, ligesom den først er fundet der. Spørgsmaalet: hvor høit tilfjelds gaar hydrachniderne i Norge, og hvilke arter gaar høiest, staar endnu ubesvaret. Ligesaa ubesvaret er spørgsmaalet: hvorlangt mod nord i Norge (? i verden) findes hydrachnider?

Som bidrag til besvarelsen heraf kan jeg meddele følgende. Prof. R. Collett forsøgte i sommer (1896) at finde hydrachnider i Finmarken; men det var ikke muligt at opdage en eneste. Professor G. O. Sars og konservator Sparre-Schneider har meddelt, at de paa sine talrige undersøgelser i Finmarkens ferskvand ikke mindes at have truffet en eneste hydrachnide. Ligesaa har jeg hørt, at den svenske hydrachnolog, rektor Neuman, har søgt disse dyr forgjæves i Finmarken. Nordgrænsen for hydrachniderne skulde derefter ligge sydligere. Paa de nordligste steder, hvortil jeg paa min reise i sommer naaede, fandtes de i rigeligt antal; det er da rimeligt, at de findes langt nordenfor Throndhjem. Jeg haaber senere at faa anledning til at undersøge dette forhold nærmere.

Et andet problem af biologisk art har vakt min opmerksomhed. Jeg har gjort den iagttagelse, at hydrachnidebestanden i samme vand kan veksle sterkt. Arter, der en tid af sommeren var at finde i mængde, var til en anden tid sammesteds ikke at finde eller uhyre sjeldne. Paa grund af knap tid har jeg kun konstateret dette for ganske faa steder. I Sagtjern (Saukjen) ved Elverum fandt jeg den 15de juli foruden andre i stor mængde 2 *Arrenurus*-arter (*Arr.* ♂ + ♀ *Neumani*, Piers. og *Arr.* ♂ + ♀ *pustulator*, Müll.), især var *Arr. pustulator* hyppig. Paa tilbagereisen, en maaned senere, fandt jeg d. 12te august *Arr. Neumani* talrig som før, men ikke en eneste *Arr. pustulator* trods ihærdig efterforskning. Tjernet var noget mindre end før og sterkt opvarmet i den hede sommer (1896), men frisk nok til opholdssted for andre hydrachnider. At ikke aarstiden alene var grund nok til det forandrede forhold, fik jeg beviser for 3 dage efter, idet jeg den $^{15}/_{8}$ i et vand Afskaaken (nær Mesna) ovenfor Lillehammer fandt *Arr.* ♂ + ♀ *pustulator* talrig repræsenteret samtidig med *Arr. Neumani* og fl.

En anden iagttagelse gjordes i Mjøsen. Den 22de juni vrimlede der i græsset paa de oversvømmede bredder rundt Akersviken (ved Hamar) af *Hydrochoreutes* (alle 3 saakaldte arter), foruden 3 *Curvipes*-arter, *Piona lutescens* og et par sjeldnere. Den $^{31}/_{8}$ var det næsten umuligt at finde en eneste. De tidligere oversvømmede bredder laa nu aldeles tørre. Vandet var sunket langt nedenfor den græsbevoksede bred. Her fremstiller det spørgsmaal sig: hvor er de tidligere hydrachnider, og hvorledes holder arterne sig til næste aar? De fandtes ikke svømmende i vandet, hverken tæt ved bredderne eller paa dybet. Jeg roede frem og tilbage med planchton-haav, og fik fuldt af crustaceer, men ingen hydrachnider. Jeg kan nærmest tænke mig 3 muligheder: 1) Enten graver hydrachniderne sig ned i jorden og ligger der, til vandet stiger, 2) eller trækker de sig tilbage med det synkende vand og opholder sig nede i bundmudderet, naar ingen planter er at finde, 3) eller dør de paa land under tørken og forplantes videre gjennem eg, larver eller nymfer. Larver kan jo overføres ved insekter. Det kunde ogsaa tænkes, at den varme sommer 1896 bevirkede et exceptionelt forhold, en større massedød; det er neppe rimeligt, kan ialfald ikke paavises før næste sommer. Jeg fik ihøst ikke tid til at undersøge jorden paa bredderne. Jeg fandt i nogle prøver fra mudderet i vandets bund en *Hydrochoreutes* (og en *Midea* eller *Mideopsis*); de tabtes under transporten. Dette viser, at ialfald enkelte trækker sig tilbage eller opholder sig i eller ved bunden.

I prægtige evjer af Losna (Gudbrandslaagen) ved Tronsnes og Kirkestuen fandtes den d. $^{30}/_{8}$ meget faa hydrachnider i vandet og paa planterne, men inde i plantestilke (især af *Potamogeton*) og i mudderet fandtes en hel del (mest nymfer) af *Limnesia maculata, Curvipes luteolus, Hydrochoreutes* samt *Lebertia tau—insignita* og *Midea elliptica.* Stedet maa undersøges paa forsommeren i flomtiden; da tror jeg, der vil findes et stort antal hydrachnider.

Ved Gjersjø fandt jeg d. $^{26}/_{4}$ paa de oversvømmede bredder af elven nær Sætre (Oppegaard) i mængde: *Lebertia*

Hydryphantes ruber, Thyas og Curvipes-nymfer. Hele sommeren laa disse bredder ganske tørre, over 20 meter fra elven. Ude i elven fandtes ganske andre arter i mængde (*Hydrochoreutes, Hygrobates longip., Atax crassipes, Piona, Eylaïs* og fl.), men kun ganske enkeltvis *Hydryphantes ruber.* I Sognsvand (Vestre Aker) har prof. G. O. Sars bemerket talrige hydrachnider. Ved min undersøgelse ihøst (24/8) var vandstanden meget lav, bredderne tørre. Ude i vandet stod kun enkelte planter (*Nymphæa, Sparganium-, Eqvisetum-, Potamogeton*-arter), mellem hvilke kun faa hydrachnider (*Limnesia maculata Diplodontus despiciens, Arr. emarginator og Arr. pustulator*) fandtes. Ude paa dybet fiskedes med planchton-haav rigelig af *Curvipes*-nymfer og enkelte voksne *C. dubius* i forskjellige dybder fra bund til overflade men ingen af de ved bredden fundne.

I enkelte hydrachnologers afhandlinger cfr. Neuman: «Om Sveriges Hydr.» meddeles, at hydrachniderne om vinteren ligger i dvale i bundmudder, mose, vandplanter og lignende. Derimod har jeg ingen nøiere meddelelser kunnet finde om deres liv eller forhold i tørkeperioder om sommeren. Det ser ikke ud, som om de lægger særlige vintereg; de fleste synes heller ikke at være seiglivede, saa de kan udholde tørke. Mest udholdende synes enkelte ungdomsformer og de pantserklædte arter *Arrenurus* at være. Meget seiglivet viser ogsaa den bløde *Limnochares* sig. Den kan leve og trives udmerket i flere maaneder i et lidet vandglas uden anden føde end de infusionsdyr, sop, alger og lignende som vandet tilfældig indeholder. Den synes ikke at behøve større dyr til næring, jeg har aldrig seet den angribe end ikke en Crustacé. (Dens modstand mod tørke kjender jeg dog ikke). Af andre mindre rovgjerrige vil jeg nævne *Hydryphantes ruber, Diplodontus despiciens, Eylaïs extendens, Lebertia* og enkelte *Hygrobates-spp.* Derimod viser *Curvipes-* (især *Bruzelii*) og

Limnesia-arter sig som de rovgjerrigste. Enkelte af dem foretrækker andre hydrachnider for crustaceer. Flere (især *Limnesia*) ynder *Eylais*; andre f. eks. *Curvipes Bruzelii* foretrækker *Curvipes fuscatus* og *niger* fremfor anden føde. Jeg finder det ikke rigtigt i denne henseende at udtale noget almindeligt om alle hydrachnider, hvad der af og til sees gjort. Der er stor forskjel indenfor de forskjellige slegter og arter. Trods sin bygning er de neppe alle rovdyr; ialfald er deres føde meget forskjellig. Mine undersøgelser har imidlertid været altfor kortvarige til herom at kunne give detaljerede oplysninger.

Register over de i Norge sommeren 1896 fundne hydrachnider.

*) Først under korrekturen af registret er jeg bleven vis paa, at den under navnet *Arr. dubius* (= *bicuspidator*) opførte art ikke kan identificeres med *Arr. tricuspidator,* Neum. (= *dubius,,* Koen.), da *petiolus* er langt smalere mod spidsen. Jeg tænkte, at forskjellen kunde skrive sig fra mindre nøiagtig tegning hos Neuman, men finder nu dette usandsynligt Jeg opfører derfor her arten under navnet *Arr. augustipetiolatus nov. sp.* og skal senere beskrive den.

Kristiania, den 30te november 1896.

Sig. Thor.

Forklaring over figurerne.

Planche I.

Fig. 1. **Hydrachna globosa**, De Geer
(? **biscutata**, nov. sp.):
Kjønsfelt og epimerer (ca. 50 gange forstørret).

1 epim. = 1ste epimerpar.
2 epim. = 2det epimerpar.
3 epim. = 3die epimerpar.
4 epim. = 4de epimerpar.
p. 3 = 3die fods første 2 led.
p. 4 = 4de fods første led.
kpl. = kjønspladerne med tætstaaende smaa kjønskopper.

Fig. 2. **H. globosa**, De Geer
(? **biscutata**, nov. sp.):
Rygskjoldene og de 5 øine (ca. 50 gange forstørret).

oc. = øie.
5 = det 5te uparrede øie mellem skjoldene.

Fig. 3. **H. uniscutata** nov. sp.
Skjold og øine (ca 25 gange forstørret).

oc. = øie.
5oc. = det 5te uparrede øie indvokset i skjoldet.

Fig. 4, **Teutonia subalpina**, nov. sp.
kjønsfelt og 2 epimerpar (3 epim. og 4 epim.)
(ca. 50 gange forstørret).

kb. = den store kitinbue ved sprekkens forende.
kk. = kjønsklapperne; under dem findes de 3 par kjønskopper.

Fig. 6 og 7. Til sammenligning de samme dele hos
Teutonia primaria, Koenike (fig. 6 ♂, fig. 7 ♀)
(ca. 30 gange forstørret).

Fig. 5. **Teut. subalpina**, palpe.
pt. = palpetanden paa 2det palpeled.

Fig. 8. Til sammenligning samme palpe hos
Teut. primaria, Koenike.

Fig. 9. **Arrenurus gilvator**, ♂ nov. sp.
seet fra oversiden (ca. $\frac{45}{1}$).

oc. = øie.
rl. = ryglinien.
anh. = hale-anhang.
pet. = petiolus.

Fig. 10. **Rivobates norvegicus**, ♀ nov. sp.
seet fra undersiden: labium, epimerer og kjønsfelt (ca. $\frac{47}{1}$).

ll. = labium.
1 ep., 2 ep., 3 ep., 4 ep. = 1ste—4de epimerer.
kb. = forreste kitinbue.
kk. = kjønsklapper.
kpl. = kjønsplader med kjønskopper.
an. = anus med 2 stigner paa siderne.

(Fig. 20 paa pl. II, kjønsfeltet hos ♂).

Fig. 11. **Hygrobates albinus,** nov. sp.
palperne (ca. $\frac{35}{1}$).

Fig. 16. **Curvipes Stjørdalensis,** ♀ nov. sp.
seet fra undersiden (ca. $\frac{45}{1}$).

plp. = palper; pt = palpetænder.
l. l. = labium.
1 ep.—4 ep. = 1ste—4de epimerpar.
pr. = 4de epimers processus.
1 p.—4 p. = 1ste—4de fod.
kk. = kjønsklapper.
kpl. = kjønsplader med kjønskopper.

Fig. 17. **C. Stjørdalensis,** ♂. Undersiden (ca. $\frac{42}{1}$)
lab. = labium
t. = kjønstasken.
sk. = skaar eller udsnit i 4de fods 4de led.
De øvrige bogstaver har samme betydning som i fig. 16.

Planche II.

Fig 12. **Hygrobates albinus.** nov. sp.
Samme palper som paa fig. 11, men langt sterkere forstørrede (ca. $\frac{140}{1}$).

Fig. 13. **Curvipes niger** ♀, nov. sp.
seet fra undersiden (ca. $\frac{40}{1}$).
Bogstavernes betydning som paa fig. 16 & 17.
Paa grund af tegnefeil er kroppen bleven for smal bagtil.

Fig. 14. **C. niger** ♂ (ca. $\frac{40}{1}$).

Fig. 15. **C. niger** ♂, palperne, (ca. $\frac{40}{1}$).

Fig. 16 & 17 paa pl. I.

Fig. 18. **Curvipes alatus** ♂, nov. sp.
seet fra undersiden (ca. $\frac{65}{1}$).
Bogstavernes antydning som paa fig. 16—17.

Fig. 19. **C. alatus** ♀, kjønsfelt og 2 epimerpar, (ca. $\frac{90}{1}$).

Fig. 20. **Rivobates norvegicus** ♂, nov. sp. kjønsfelt (ca. $\frac{47}{1}$).

Fig. 21. **Arrenucus gilvator** ♂, nov. sp. seet fra undersiden (ca. $\frac{60}{1}$).

Ved feiltegning er bredden for stor i forhold til længden.

Fig. 22. **Hygrobates albinus**, nov. sp. (ca. $\frac{40}{1}$).

a. ♀ kjønsfelt med kjønsklapper og med 3 kjønskopper paa hver af de 2 koppeplader.

b. ♂ kjønsfelt med gabende sprek omgivet af ring og 2 koppeplader hver med 3 kjønskopper.

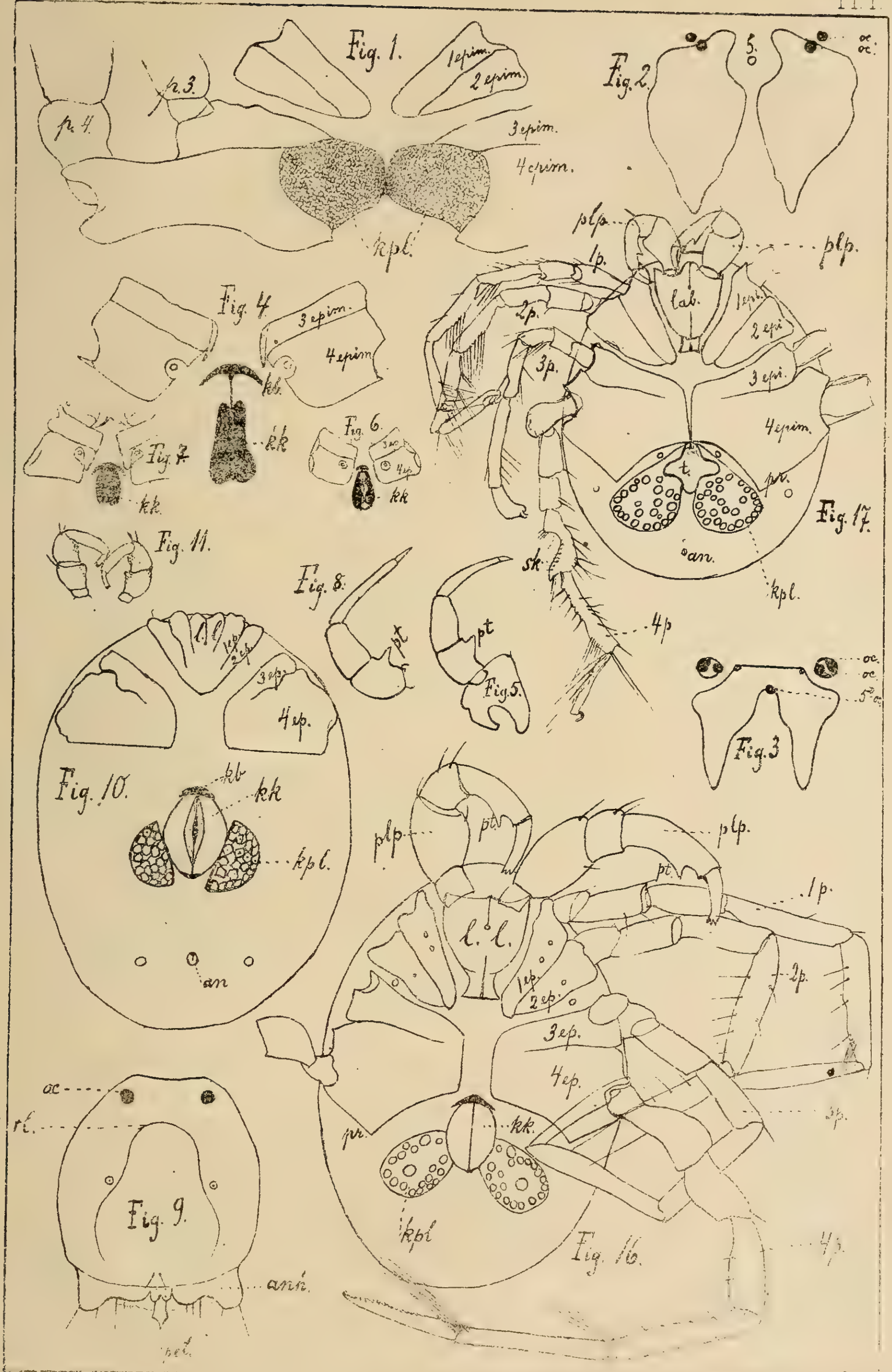


Fig. 1.
p. 4.
p. 3.
1 epim.
2 epim.
3 epim.
4 epim.
kpl.
Fig. 2.
5.
oc.
Fig. 4
3 epim.
4 epim.
kb.
kk
Fig. 7
kk.
Fig. 6.
kk
Fig. 11.
Fig. 8.
pt
pt
Fig. 5.
plp.
lab.
1 p.
2 p.
3 p.
3 epi.
4 epim.
t.
pr.
Fig. 17.
an.
kpl.
sk
4p
Fig. 3
Fig. 10.
l. l.
3 ep.
4 ep.
kb
kk
kpl.
an
plp
pt
l. l.
1 p.
2 p.
1 ep.
2 ep.
3 ep.
4 ep.
kk.
pr.
kpl
Fig. 16.
oc
rt.
Fig. 9.
ann.

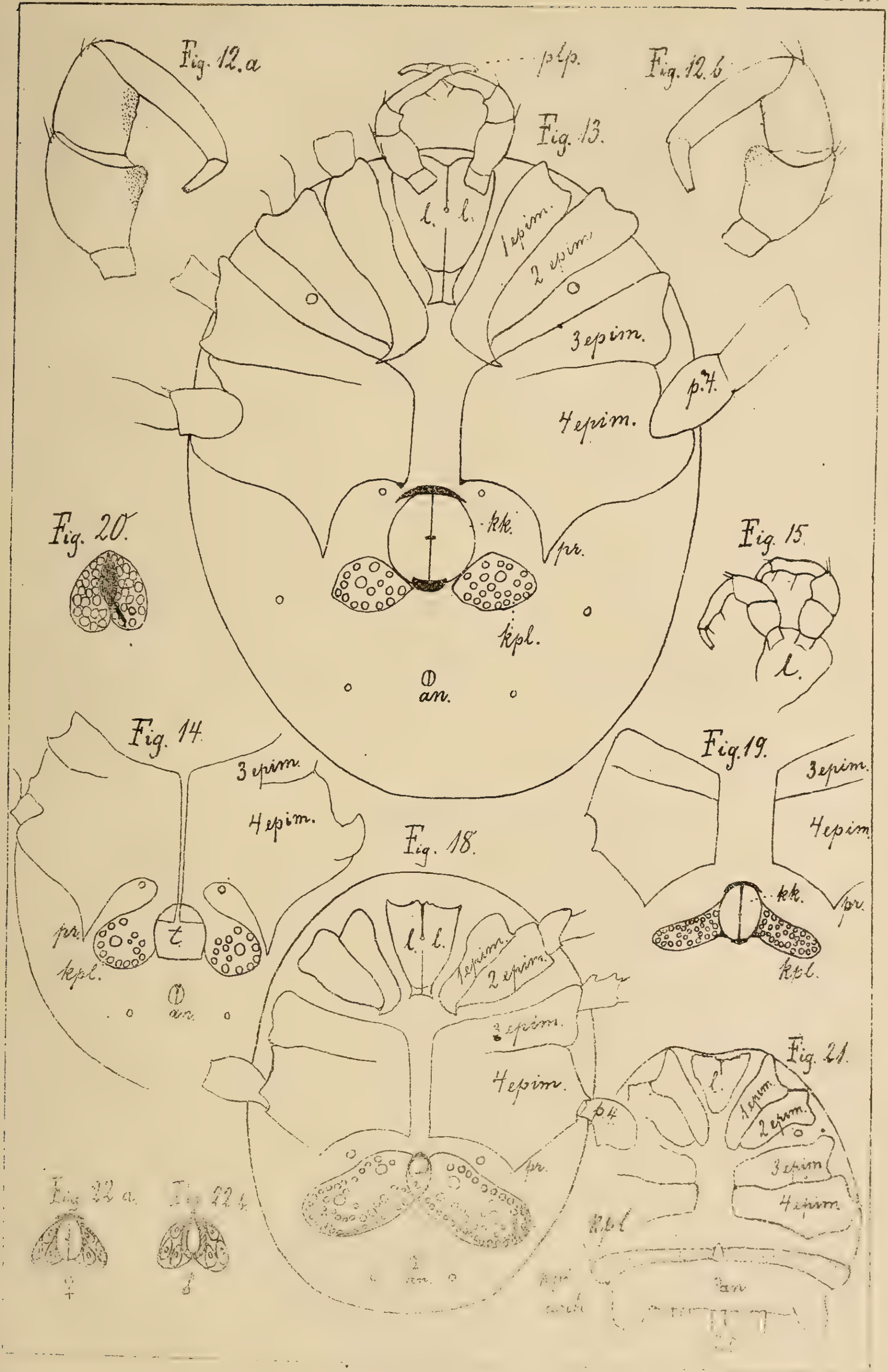


Fig. 12. a
Fig. 12. b
Fig. 13.
plp.
l. l.
1 epim.
2 epim.
3 epim.
4 epim.
p. 4.
kk.
pr.
kpl.
an.
Fig. 20.
Fig. 15.
l.
Fig. 14.
3 epim.
4 epim.
pr.
t.
kpl.
an.
Fig. 18.
l. l.
1 epim.
2 epim.
3 epim.
4 epim.
p4.
pr.
an.
Fig. 19.
3 epim.
4 epim.
kk.
pr.
kpl.
Fig. 21.
l.
1 epim.
2 epim.
3 epim.
4 epim.
an
Fig. 22 a.
Fig. 22 b.
♀
♂

ARCHIV

FOR

MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND, SOPHUS LIE, G. O. SARS OG S. TORUP

NITTENDE BIND. FØRSTE HEFTE

KRISTIANIA
ALB. CAMMERMEYERS FORLAG
LARS SWANSTRØM
1896

Bind XIX. Hefte 1.

Indhold.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab udkommer med 1 bind (4 hefter) aarlig. Subskribtionsprisen er kr. 8 pr. bind.

Alb. Cammermeyers Forlag
(Lars Swanstrøm).

ARCHIV

FOR

MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND, SOPHUS LIE, G. O. SARS OG S. TORUP

XIX

NITTENDE BIND. ANDET HEFTE

KRISTIANIA

ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

LARS SWANSTRØM

1896

Bind XIX. Hefte 2.

Indhold.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab udkommer med 1 bind (4 hefter) aarlig. Subskriptionsprisen er kr. 8 pr. bind.

Alb. Cammermeyers Forlag
(Lars Swanstrøm).

ARCHIV

FOR

MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND, SOPHUS LIE, G. O. SARS og S. TORUP

XIX 3

NITTENDE BIND. TREDIE HEFTE

KRISTIANIA

ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

LARS SWANSTRØM

1897

Bind XIX. Hefte 3.

Indhold.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab udkommer med 1 bind (4 hefter) aarlig. Subskriptionsprisen er kr. 8 pr. bind.

Alb. Cammermeyers Forlag
(Lars Swanstrøm).

ARCHIV

FOR

MATHEMATIK OG NATURVIDENSKAB

UDGIVET

AF

AMUND HELLAND, SOPHUS LIE, G. O. SARS OG S. TORUP

XIX. 4

NITTENDE BIND. FJERDE HEFTE

KRISTIANIA

ALB. CAMMERMEYERS FORLAG

LARS SWANSTRØM

1897

Bind XIX. Hefte 4.

Indhold.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab udkommer med 1 bind (4 hefter) aarlig. Subskriptionsprisen er kr. 8 pr. bind.

Alb. Cammermeyers Forlag
(Lars Swanstrøm).